

Série S

Le lundi 23 avril 2018

Durée de l'épreuve : 4h

Bac blanc de Mathématiques n°3

Commun à tous les élèves

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision du raisonnement entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Exercice n° 1 : 5 points

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On muni le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Proposition 1 :

L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 4| = |z + 2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$.

Proposition 2 :

Soit (E) l'équation $(z - 1)(z^2 - 8z + 25) = 0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3 :

$\frac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $(-\sqrt{3} + i)^8$.

Partie B :

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n .

On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point d'affixe z_A .

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exercice n°2 : 5 points

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30m du sol.

Partie A-Modélisation de l'âge d'un épicéa.

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30m du sol par la fonction f définie sur $]0 ; 1[$ par :

$$f(x) = 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

Où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

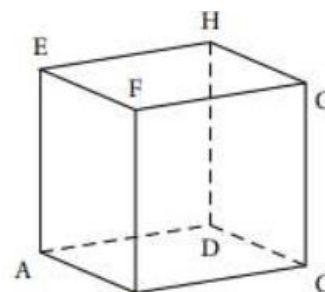
On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en année)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1. a. Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27cm.
3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
 - a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en exprimant la démarche.
 - b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70cm ?

Exercice n°3 : 4 points

On considère un cube ABCDEFGH.



1. a. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
b. En déduire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
2. L'espace est muni d'un repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$).
 - a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.
 - b. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AG).
 - c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).
 - d. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide BDEG.

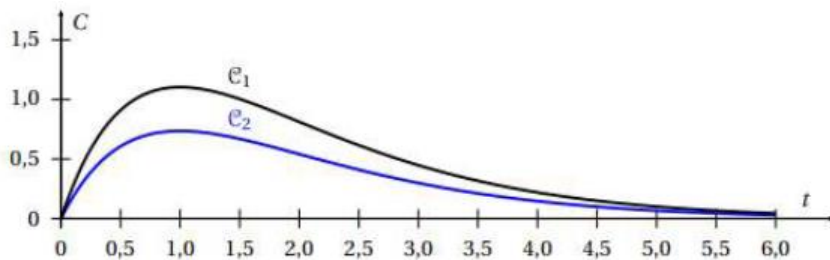
Exercice n°4 : 6points

Partie A

Voici deux courbes C_1 et C_2 qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps.



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. A un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.

A quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe de la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.
3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration d'alcool dans son sang peut-être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = Ate^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Déterminer $f'(0)$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« A quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B- Etude d'un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne se jeune conducteur, boit deux verres de rhum.

La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t , exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = 2te^{-t}$$

1. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. A quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2 \text{ g.L}^{-1}$ pour un jeune conducteur.

a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

b. Quelle durée maximale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ? donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration maximale d'alcool détectable dans le sang est estimée à $5 \times 10^{-3} \text{ g.L}^{-1}$.

a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par : $f(t) = 2te^{-t}$.

Initialisation : $t \leftarrow 3,5$ $p \leftarrow 0,25$ $C \leftarrow 0,21$ Traitement : Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire : $t \leftarrow t + p$ $C \leftarrow f(t)$ Fin Tant que Sortie : Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant l'algorithme.

Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Etape 1	Etape 2
P	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Exercice 1 :

Partie A :

1. Proposition 1 :

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 4| = |z + 2i|$.

On note A(3i), B(4) et C(-2i).

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |z_M - z_B| = |z_M - z_C| \Leftrightarrow BM = CM$$

Donc $\mathcal{E}$ est la médiatrice de [BC]. Ce qui justifie que $\mathcal{E}$ est une droite.

Le point A appartient-il à cette droite ?

$$BA = |3i - 4| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$CA = |3i + 2i| = |5i| = 5$$

Donc A appartient à la médiatrice de [BC]. **La proposition 1 est donc vraie.**

Autre méthode : En notant $z = x + iy$

$$\text{On a : } |z - 4| = |z + 2i| \Leftrightarrow |x + iy - 4| = |x + iy + 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2}$$

$$|z - 4| = |z + 2i| \Leftrightarrow (x - 4)^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2$$

$$|z - 4| = |z + 2i| \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$|z - 4| = |z + 2i| \Leftrightarrow -8x - 4y + 12 = 0$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'une droite.

$$-8 \times 0 - 4 \times 3 + 12 = -12 + 12 = 0$$

Donc A de coordonnées (0 ; 3) appartient à cette droite.

2. Proposition 2 :

$$(E) : (z - 1)(z^2 - 8z + 25) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z^2 - 8z + 25 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 25 = 64 - 100 = -36 < 0$$

On en déduit que la dernière équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{8 - 6i}{2} = 4 - 3i \text{ et } z_1 = 4 + 3i$$

On note A(1), B(4 - 3i) et C(4 + 3i).

$$AB = |4 - 3i - 1| = |3 - 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$AC = |4 + 3i - 1| = |3 + 3i| = \sqrt{18}$$

$$BC = |4 + 3i - 4 + 3i| = |6i| = 6$$

$$\text{On remarque que : } AB^2 + AC^2 = 18 + 18 = 36 = BC^2$$

On en déduit, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que les points dont les affixes sont les solutions de (E) sont les sommets d'un triangle rectangle. **La proposition 2 est vraie.**

3. Proposition 3 :

$$\text{On pose } Z = (-\sqrt{3} + i)^8 \text{ et } z = -\sqrt{3} + i$$

$$|z| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{On en déduit : } z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \text{ et } \arg z = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{Or : } Z = (-\sqrt{3} + i)^8 = z^8$$

$$\text{D'après la formule de Moivre : } \arg Z = 8 \times \frac{5\pi}{6} [2\pi] = \frac{40\pi}{6} [2\pi] = \frac{4\pi}{6} + \frac{36\pi}{6} [2\pi] = \frac{2\pi}{3} + 6\pi [2\pi] = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$\frac{\pi}{3}$ n'est pas un argument de $(-\sqrt{3} + i)^8$. **La proposition 3 est fausse.**

Partie B :

La suite (z_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé on note M_n le point d'affixe z_n et A celui d'affixe $z_A = 4 + 2i$.

1. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = z_n - z_A$.

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2}i z_n + 5 - 4 - 2i = \frac{1}{2}i z_n + 1 - 2i$$

$$\text{Or : } u_n = z_n - z_A \Leftrightarrow z_n = u_n + z_A$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} = \frac{1}{2}i(u_n + 4 + 2i) + 1 - 2i = \frac{1}{2}i u_n + 2i + i^2 + 1 - 2i = \frac{1}{2}i u_n$$

b) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : \ll u_n = (\frac{1}{2}i)^n (-4 - 2i) \gg$ est vraie.

■ Initialisation :

Si $n = 0$

$$\text{Alors d'une part : } u_0 = z_0 - z_A = -4 - 2i \quad \text{et d'autre part : } (\frac{1}{2}i)^0 (-4 - 2i) = -4 - 2i$$

Donc : $u_0 = (\frac{1}{2}i)^0 (-4 - 2i)$ et la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

■ Hérédité :

Soit n un entier naturel. $n \geq 0$

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n = (\frac{1}{2}i)^n (-4 - 2i)$

$$\text{Or : } u_{n+1} = \frac{1}{2}i u_n = \frac{1}{2}i \times (\frac{1}{2}i)^n (-4 - 2i) = (\frac{1}{2}i)^{n+1} (-4 - 2i)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

■ Conclusion :

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\frac{1}{2}i)^n (-4 - 2i)$.

2. Pour démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés on peut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM_n}$ et $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ sont colinéaires.

$$z_{\overrightarrow{AM_n}} = z_n - z_A = u_n = (\frac{1}{2}i)^n (-4 - 2i)$$

$$z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = z_{n+4} - z_A = u_{n+4} = (\frac{1}{2}i)^{n+4} (-4 - 2i) = (\frac{1}{2}i)^4 (\frac{1}{2}i)^n (-4 - 2i) = \frac{1}{16} z_{\overrightarrow{AM_n}}$$

$\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16} \overrightarrow{AM_n}$ donc ces vecteurs sont colinéaires. Les points A, M_n et M_{n+4} sont donc alignés.

Exercice 2 :

Partie A :

1. $\forall x \in]0 ; 1[$, on a : $f(x) = 30 \ln(\frac{20x}{1-x}) = 30 \ln(u(x))$ avec : $u(x) = \frac{20x}{1-x} = \frac{v(x)}{w(x)}$

$$u'(x) = \frac{v'(x)w(x) - w'(x)v(x)}{w^2(x)} = \frac{20(1-x) - (-1)20x}{(1-x)^2} = \frac{20 - 20x + 20x}{(1-x)^2} = \frac{20}{(1-x)^2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = 30 \frac{u'(x)}{u(x)} = 30 \frac{\frac{20}{(1-x)^2}}{\frac{20x}{1-x}} = 30 \frac{20}{(1-x)^2} \frac{1-x}{20x} = 30 \frac{1}{(1-x)x} = \frac{30}{(1-x)x}$$

$30 > 0$ et $\forall x \in]0 ; 1[$ on a $x > 0$ et $1 - x > 0$ donc $f'(x) > 0$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0 ; 1[$.

2. On souhaite résoudre : $20 \leq f(x) \leq 120$

$$20 \leq 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leq 120$$

$$\frac{20}{30} \leq \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leq \frac{120}{30}$$

$$e^{\frac{2}{3}} \leq \frac{20x}{1-x} \leq e^4$$

Pour continuer, il faut résoudre séparément :

$$\begin{aligned} &e^{\frac{2}{3}} \leq \frac{20x}{1-x} \\ \forall x \in]0 ; 1[, 1-x > 0 \text{ Donc :} \\ &e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leq 20x \\ &e^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}x \leq 20x \\ &(20+e^{\frac{2}{3}})x \geq e^{\frac{2}{3}} \\ &x \geq \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20+e^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{20x}{1-x} \leq e^4 \\ \forall x \in]0 ; 1[, 1-x > 0 \text{ Donc :} \\ &20x \leq e^4(1-x) \\ &20x + e^4x \leq e^4 \\ &(20+e^4)x \leq e^4 \\ &x \leq \frac{e^4}{20+e^4} \end{aligned}$$

Finalement, le diamètre x doit être compris entre $\frac{e^{\frac{2}{3}}}{20+e^{\frac{2}{3}}} \approx 0,089$ et $\frac{e^4}{20+e^4} \approx 0,732$

Partie B :

1. a) La vitesse moyenne de croissance d'un épicéa, de 70 ans à 80 ans, est égale à 0,245 mètre par an.

b) En C3 il faut saisir : $(C2 - B2) / (C1 - B1)$

2. 27 cm = 0,27 m

$$f(0,27) = 30 \ln\left(\frac{20 \times 0,27}{1-0,27}\right) \approx 60$$

D'après le tableau, de 50 à 70 ans, un épicéa grandit en moyenne de 0,22 mètre par an.

A 50 ans il mesure 11,2 m.

$$11,2 + 10 \times 0,22 = 13,4$$

Ainsi, la hauteur attendue pour un épicéa dont le diamètre est mesuré à 27 cm est d'environ 13,4 m.

3. a) On complète le tableau :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Age (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en m)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par an)		0,22	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

L'intervalle d'âge durant lequel la qualité du bois est la meilleure est celui durant lequel la vitesse de croissance est la meilleure : 0,25 mètre par an.

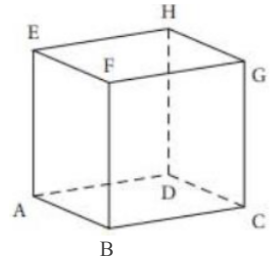
La première valeur 0,25 apparente en E3 correspond à la vitesse de croissance de 80 à 85 ans. La dernière, en G3, à la vitesse de croissance de 90 à 95 ans. On en déduit l'intervalle d'âge [80 ; 95].

b) 70 cm = 0,7 m et $f(0,7) \approx 115,3$ ans

Ce résultat n'est pas compris dans l'intervalle [80 ; 95].

A cet âge, la vitesse de croissance diminue à 0,24 mètre par an. La qualité du bois n'est donc plus la meilleure. Les bûcherons devraient couper les arbres plus tôt.

Exercice 3 : On considère le cube ABCDEFGH



1. a) Dans le cube, les arêtes [AE] et [CG] sont parallèles et de même longueur. On en déduit $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$.

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$ d'après la relation de Chasles.

b) On en déduit :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$$

Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

De plus, la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABCD) qui contient (BD). Donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

Finalement : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

c) On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ et on vient de justifier $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

On en déduit que la droite (AG) est orthogonale aux droites (BE) et (BD), sécantes dans le plan (BDE).

Or, si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale au plan.

Donc (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. a) Dans l'espace, muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

$$A(0;0;0) \quad B(1;0;0) \quad C(0;1;0) \quad D(0;0;1) \quad G(1;1;1)$$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, normal au plan (BDE).

Le plan (BDE) a donc une équation cartésienne de la forme $1x + 1y + 1z + d = 0$ où d est un réel.

$B(1;0;0) \in (BDE)$ donc ses coordonnées sont solutions de l'équation.

On en déduit : $1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

Ainsi, le plan (BDE) a pour équation cartésienne $x + y + z - 1 = 0$

b) La droite (AG) passe par $A(0;0;0)$ et elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit sa représentation paramétrique : (AG) : $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 1t \\ z = 0 + 1t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

c) On note $K(x; y; z)$ le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).

Les coordonnées de K sont solutions du système : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

On en déduit : $t + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Ainsi, le point K a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

d) On admet que l'aire du triangle BDE est $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le volume de la pyramide BDEG est alors : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ où h désigne la hauteur de la pyramide.

h est donc la distance du sommet G de la pyramide à sa base (BDE), c'est-à-dire la longueur GK.

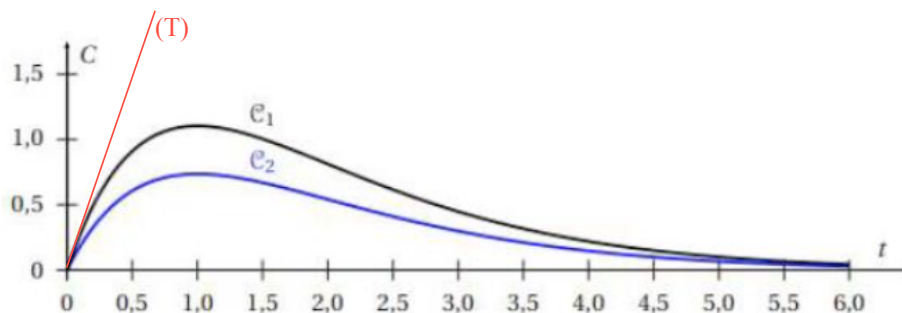
$$GK = \sqrt{(x_G - x_K)^2 + (y_G - y_K)^2 + (z_G - z_K)^2}$$

$$GK = \sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2 + (1 - \frac{1}{3})^2 + (1 - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = \sqrt{3 \times \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Finalement : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$

Exercice 4 :

Partie A :



- La vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang, donnée par $C'(t)$, est maximale lorsque la tangente (T) à la courbe C a un coefficient directeur maximal. Graphiquement, c'est à l'instant $t = 0$ que cette vitesse est maximale.
- La personne la plus corpulente est celle qui subit le moins vite les effets de l'alcool.
Des deux courbes, celle qui croît le moins vite est C_2 .
On en déduit que P_2 est la personne la plus corpulente.
- La fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = At e^{-t}$ donne la concentration d'alcool dans le sang d'une personne à jeun qui absorbe de l'alcool.
 - $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $f(t) = At e^{-t} = u(t)v(t)$ avec $u(t) = At$ et $v(t) = e^{-t}$
On en déduit : $f'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t)$
$$f'(t) = A e^{-t} - e^{-t} At = (A - At)e^{-t}$$

Donc $f'(0) = (A - 0)e^0 = A$
 - $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente (T) tracée précédemment.
On a vu que ce coefficient directeur correspondait à la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang.
Plus une personne est corpulente, plus l'alcool apparaît lentement dans le sang et par conséquent, moins la valeur de A est grande. L'affirmation donnée était donc fausse.

Partie B : Etude d'un cas particulier

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 2t e^{-t}$

- Du résultat obtenu à la question 3a) de la partie A, on déduit : $f'(t) = (2 - 2t)e^{-t} = 2(1 - t)e^{-t}$
 $2 > 0$ et $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $e^{-t} > 0$
 Le signe de $f'(t)$ est donc celui de $1 - t$
 $1 - t > 0 \Leftrightarrow 1 > t \Leftrightarrow t < 1$ et : $1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1$
 $f(1) = 2 e^{-1} = \frac{2}{e}$ et $f(0) = 0$
 On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{2}{e}$	

- La concentration d'alcool est maximale quand $t = 1$ heure. Sa valeur est alors égale à $\frac{2}{e} \approx 0,74 \text{ g.L}^{-1}$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$
 $f(t) = 2t e^{-t} = 2 \frac{t}{e^t}$
 Par inverse de limite, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$
 On en déduit, par produit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2 \times 0 = 0$
 Cela signifie que lorsque t sera suffisamment grand la concentration d'alcool dans le sang retombera à 0

4. a) On sait que :

D'une part :

- f est continue sur $[0 ; 1]$
- f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$
- f est à valeurs dans $[0 ; \frac{2}{e}]$ avec $\frac{2}{e} \approx 0,74$
- $0,2 \in [0 ; \frac{2}{e}]$

D'autre part :

- f est continue sur $[1 ; +\infty[$
- f est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2 \times 0 = 0$ donc f reste à valeurs dans $[0 ; \frac{2}{e}]$ et $0,2 \in [0 ; \frac{2}{e}]$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0,2$ admet une solution unique t_1 sur $[0 ; 1]$ et une autre unique t_2 sur $[1 ; +\infty[$.

En utilisant le tableur de la calculatrice et la méthode par balayage on obtient : $t_1 \approx 0,11$ et $t_2 \approx 3,58$

b) Pour pouvoir reprendre le volant, le taux d'alcoolémie dans le sang doit être inférieur à 0,2.

La durée maximale que Paul devra attendre est celle de $t_2 \approx 3,58$ h.

$0,58 \text{ h} = 0,58 \times 60 \text{ min} \approx 35 \text{ min}$.

Donc Paul devra attendre 3 h 35 min avant de reprendre le volant.

5. a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

Donc il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang passe en dessous de $5 \times 10^{-3} \text{ g.L}^{-1}$ et n'est plus détectable.

```

Initialisation :  $t \leftarrow 3,5$ 
                   $p \leftarrow 0,25$ 
                   $C \leftarrow 0,21$ 

Traitement : Tant que  $C > 5 \times 10^{-3}$  faire :
                   $t \leftarrow t + p$ 
                   $C \leftarrow f(t)$ 
                  Fin Tant que

Sortie :      Afficher  $t$ 
  
```

b) L'algorithme permet de déterminer cet instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang devient inférieure ou égale à $5 \times 10^{-3} \text{ g.L}^{-1}$.

Dans le tableau on fait apparaître sur la dernière ligne les deux premiers calculs de la concentration d'alcool dans le sang, toutes les 0,25 h (c'est-à-dire tous les quarts d'heure) :

	Initialisation	Etape 1	Etape 2
P	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

L'algorithme détecterait une concentration inférieure à $5 \times 10^{-3} \text{ g.L}^{-1}$ pour $t = 8,25$ h.

Donc la concentration d'alcool dans le sang ne sera plus détectable au bout de 8 h 15 min.