Série S **Durée de l'épreuve : 4 h**	**27 février 2018**

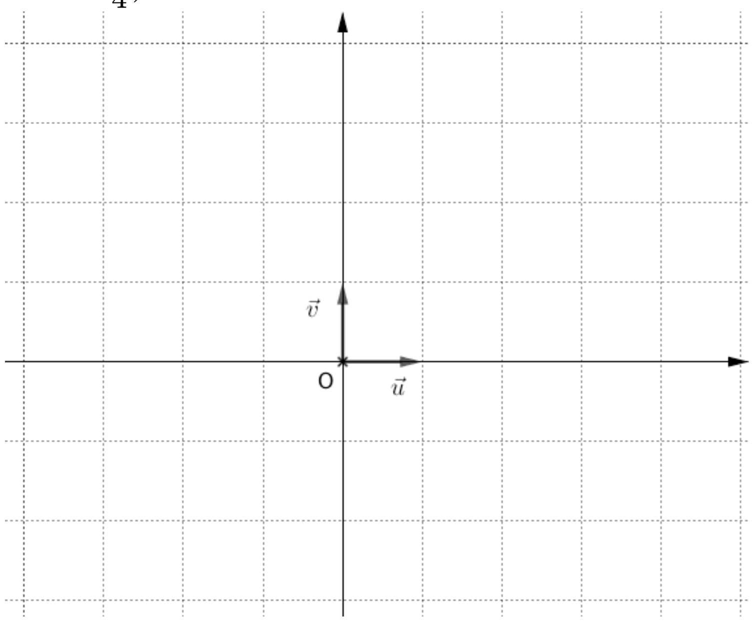
Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement spécifique -

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>*Exercice 1*</u> : (3 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2\,(cos\,\frac{\pi}{4} + \ i\,sin\,\frac{\pi}{4})$ et $z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$.



1. a) Déterminer le module et un argument de z_{A} puis de z_{B}.
   b) Interpréter géométriquement ces résultats.
   c) En déduire la position des points A et B et les placer dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) que vous représenterez sur votre feuille.
2. Justifier que le triangle OAB est isocèle et rectangle.
3. On considère l'équation (E) suivante :
   $$\text{(E)} : z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0$$
   Montrer que l'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit à OAB.

Exercice 2 : (5 points)

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9\, u_n\,(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9\, u_n$

   b) Montrer que, pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en déduire sur l'avenir de la population de tortues ?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année pour laquelle il reste au moins 30 tortues. Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
u ← 0,3
n ← 0
Tant que .............. faire :
..............
..............
Fin tant que
Afficher …
```

Partie B :

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06\, v_n\,(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite.
   Montrer que ℓ vérifie :
   $$\ell = 1,06\,\ell\,(1-\ell)$$
3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction?

Exercice 3 : (5 points)

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(t)=\frac{d}{a}(1-e^{\frac{-a}{80}t})$$

où :

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre.
- t désigne le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure.
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure.
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.
En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : Etude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7 et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(t)=12(1-e^{\frac{-7}{80}t})$$

1. Etudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\,;+\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : Détermination d'un traitement adéquat.

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut déterminer la clairance a de ce patient.
A cette fin, on règle provisoirement le débit d à 112, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(t)=\frac{d}{a}(1-e^{\frac{-a}{80}t})$$

1. Détermination de la clairance.
   Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 $\mu mol.h^{-1}$. Au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament. Elle est égale à $6,8$ $\mu mol.L^{-1}$.

   a) Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=112(1-e^{\frac{-3}{40}x})-6,8x$.
   Justifier que la clairance a du patient vérifie $f(a)=0$.

   b) On admet que f est strictement décroissante sur $[5\,;+\infty[$.
   Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$.

   c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. Réglage du débit.
   a) Déterminer la limite ℓ de la fonction C en $+\infty$ en fonction du débit d et de la clairance a.

   b) La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ. Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être égale à 15 $\mu mol.L^{-1}$.
   En déduire le débit d, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est la valeur déterminée dans la question 1.

Exercice 4 : (4 points)
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec d_1 et d_2 et orthogonale avec ces deux droites.

Partie A :

1. On pose A le point de d_1 de paramètre $t = 0$ et B le point de d_2 de paramètre $t' = 0$.
   Déterminer les coordonnées de A et B.
2. Donner un vecteur directeur $\vec{u_1}$ de d_1 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$ de d_2.
   Les droites d_1 et d_2 sont elles parallèles ? Sont-elles coplanaires ?

Partie B :

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
On admet que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

1. Préciser la position relative de la droite d_1 et du plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.
3. Démontrer que la droite d_2 coupe le plan $\mathscr{P}$ au point $C(3 ; 3 ; 5)$.

Partie C :

Soit Δ la droite dirigée par le vecteur $\vec{v}$ et passant par C.

1. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.
2. Soit D le point d'intersection des droites Δ et d_1.
   a) Déterminer les coordonnées de D.
   b) Les triangles ACD et BCD sont-ils rectangles ?
3. Expliquer pourquoi Δ répond au problème posé.

Exercice 5 : (3 points)
Les parties A et B sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A :

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %. À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à $0,98$.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est $0,95$.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

- A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A »
- C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est le double de celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B : QCM

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.
Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible. Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,02$.

1. Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?
   a) $0,26$ b) $0,08$ c) $0,92$ d) On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,05$. Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

2. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?
   a) $0,05$ b) $0,67$ c) $0,83$ d) $0,44$

Série S **Durée de l'épreuve : 4 h**	**27 février 2018**

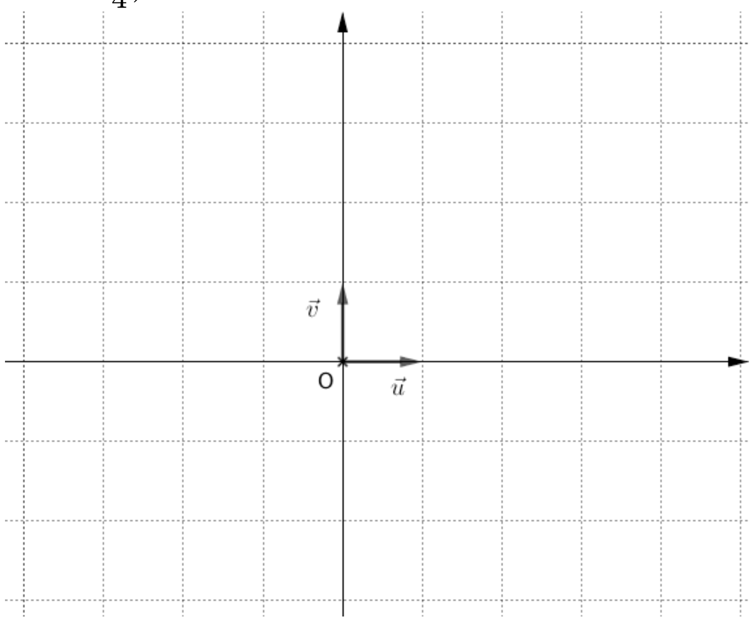
Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement de spécialité -

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>*Exercice 1*</u> : (3 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) on considère les points A et B d'affixes respectives z_{A} = 2 $(cos\ \frac{\pi}{4} +\ i\,sin\ \frac{\pi}{4})$ et z_{B} = -$\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$.



1. Déterminer le module et un argument de z_{A} puis de z_{B}.
   b) Interpréter géométriquement ces résultats.
   c) En déduire la position des points A et B et les placer dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) que vous représenterez sur votre feuille.
2. Justifier que le triangle OAB est isocèle et rectangle.
3. On considère l'équation (E) suivante :
   $$(E) : z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0$$
   Montrer que l'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit à OAB.

Exercice 2 : (5 points)

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 2\,u_n + 6$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 9 \times 2^n - 6$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n), pour tout entier naturel $n \geq 1$, par : $v_n = \frac{u_n}{6}$

3. On considère l'affirmation : « Pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ». Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2\,v_n = 1$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

   c) En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.
5. a) Vérifier que $2^4 \equiv 1 [5]$.

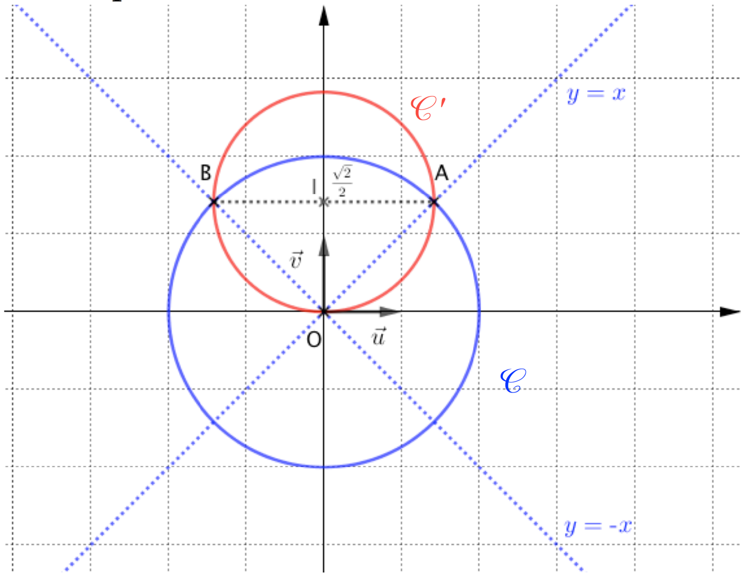
   b) En déduire que si n est de la forme $4\,k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

   c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

Correction

Exercice 1 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2\,(cos\,\frac{\pi}{4} + \,i\,sin\,\frac{\pi}{4})$ et $z_B = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$.



1. a) Déterminer le module et un argument de z_A puis de z_B.

$z_A = 2\,(cos\,\frac{\pi}{4} + \,i\,sin\,\frac{\pi}{4}) = \rho\,(cos\,\theta + \,i\,sin\,\theta)$ avec $\rho = 2 > 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.
On en déduit : $|\,z_A\,| = 2$ et $arg\;z_A = \frac{\pi}{4}\,[2\pi\,]$
$z_B = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$
$|\,z_B\,| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$
$z_B = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2} = 2\,(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\,(cos\,\frac{3\pi}{4} + \,i\,sin\,\frac{3\pi}{4})$
On en déduit : $arg\;z_B = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi\,]$

b) Interpréter géométriquement ces résultats.

$|\,z_A\,| = |\,z_B\,| = 2$ donc OA = OB = 2
$arg\;z_A = \frac{\pi}{4}\,[2\pi\,]$ donc $(\vec{u}\;;\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi\,]$
$arg\;z_B = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi\,]$ donc $(\vec{u}\;;\overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi\,]$

c) En déduire la position des points A et B et les placer dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) que vous représenterez sur votre feuille.

Le repère étant orthonormé, on place A et B à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2 et des bissectrices des axes en sachant que $sin\,\frac{\pi}{4} = sin\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

2. Justifier que le triangle OAB est isocèle et rectangle.

OA = OB = 2 donc OAB est isocèle en O.
$(\overrightarrow{OA}\;;\overrightarrow{OB}) = (\vec{u}\;;\overrightarrow{OB}) - (\vec{u}\;;\overrightarrow{OA}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\,[2\pi\,] = \frac{2\pi}{4}\,[2\pi\,] = \frac{\pi}{2}\,[2\pi\,]$
On en déduit que OAB est aussi rectangle en O.

Remarque : On peut également montrer que le triangle est rectangle en calculant la longueur de son 3e côté et en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore :
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2} - 2\,(cos\,\frac{\pi}{4} + \,i\,sin\,\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2} - 2\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$
$z_{\overrightarrow{AB}} = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\,\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$
On en déduit : AB = $|\,z_{\overrightarrow{AB}}\,| = 2\sqrt{2}$
On a : $AB^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$ et : $OA^2 + OB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en O.

3. On considère l'équation (E) suivante :

$$(\text{E}) : z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0$$

Montrer que l'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit à OAB.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{6})^2 - 4 \times 2 = 6 - 8 = -2 < 0$
On en déduit deux racines complexes conjuguées :
$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et : $z_2 = \bar{z_1} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$
On note $\mathscr{C}'$ le cercle circonscrit à OAB. OAB étant rectangle en O, le centre de $\mathscr{C}'$ est le milieu I de [AB].
$z_{\text{I}} = \frac{z_{\text{A}}+z_{\text{B}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = \frac{2i\sqrt{2}}{2} = i\sqrt{2}$
Calcul du rayon de $\mathscr{C}'$: IO = $|\, z_{\text{I}} \,| = \sqrt{2}$

Soit M et M′ les points du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.
Vérifions si M appartient à $\mathscr{C}'$:
IM = $|\, z_1 - z_{\text{I}} \,| = \left| \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} - \frac{i\,2\sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}-i\,3\sqrt{2}}{2} \right|$
IM = $\frac{|\sqrt{6}-i\,3\sqrt{2}|}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{6}^2+(3\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{6+9\times 2}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$
IM $\neq \sqrt{2}$ donc M $\notin \mathscr{C}'$

Vérifions si M′ appartient à $\mathscr{C}'$:
IM′ = $|\, z_2 - z_{\text{I}} \,| = \left| \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} - \frac{i\,2\sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \right|$
IM′ = $\frac{|\sqrt{6}-i\sqrt{2}|}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2}}{2} = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
IM′ = $\sqrt{2}$ = IO donc M′ $\notin \mathscr{C}'$
Ainsi, l'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit à OAB.

Exercice 2 :

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9\, u_n\,(1 - u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

$u_1 = 0,9\, u_0\,(1 - u_0) = 0,9 \times 0,3\,(1 - 0,3) = 0,27 \times 0,7 = 0,189$
$u_1 = 0,9\, u_1\,(1 - u_1) = 0,9 \times 0,189 \times 0,811 \approx 0,138$
Ainsi, selon ce modèle, en 2001 on comptait 189 tortues en en 2002 on en comptait 138.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel on a : $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9\, u_n$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on admet que : $0 \leq 1 - u_n \leq 1$
En multipliant chaque membre par $0,9$ et u_n tous les deux positifs, on obtient :

$$0,9u_n \times 0 \leq 0,9\, u_n\,(1 - u_n) \leq 0,9u_n \times 1$$

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9\, u_n$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$

∀ $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$ ».
Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- Initialisation :
  On a : $u_0 = 0,3$
  Et : $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$
  Donc : $0 \leq u_0 \leq 0,3 \times 0,9^0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit k un entier naturel. $k \geq 0$.
  Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors : $0 \leq u_k \leq 0,3 \times 0,9^k$
  En multipliant chaque membre des inégalités par $0,9 > 0$ on a : $0 \leq 0,9\,u_k \leq 0,9 \times 0,3 \times 0,9^k$
  $0 \leq 0,9\,u_k \leq 0,3 \times 0,9^{k+1}$
  Or, dans la question 2. a) nous avons montré : $0 \leq u_{k+1} \leq 0,9\,u_k$
  On en déduit : $0 \leq u_{k+1} \leq 0,3 \times 0,9^{k+1}$
  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
  $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : ∀ $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en déduire sur l'avenir de la population de tortues ?

∀ $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$
$0,9 \in]-1\,;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$
On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$
Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
On peut en déduire que, dans un grand nombre d'années, le nombre de tortues se rapprochera de 0.

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année pour laquelle il reste au moins 30 tortues. Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

$u \leftarrow 0,3$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geq 0,03$ faire :
$u \leftarrow 0,9u\,(1-u)$
$n \leftarrow n+1$
Fin tant que
Afficher $2000 + n - 1$

Partie B :

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06\,v_n\,(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

$v_{11} = 1,06\,v_{10}\,(1-v_{10}) = 1,06 \times 0,032 \times 0,968 \approx 0,033$
$v_{12} = 1,06\,v_{11}\,(1-v_{11}) \approx 1,06 \times 0,033 \times 0,967 \approx 0,034$
Ainsi, selon ce modèle, en 2011 on comptait 33 tortues en en 2012 on en comptait 34.

2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite.
   Montrer que ℓ vérifie :
$$\ell = 1,06\ell(1-\ell)$$

(v_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 10$ par :
$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06\, v_n\,(1-v_n) \end{cases}$$
On admet que v_n converge vers ℓ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$
De plus, par somme et produit de limites finies, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,06\, v_n\,(1-v_n) = 1,06\ell(1-\ell)$
Or, pour tout entier naturel $n \geq 10$ on a : $v_{n+1} = 1,06\, v_n\,(1-v_n)$.
Donc, les limites de chaque membre sont égales et ℓ vérifie l'équation : $\ell = 1,06\ell(1-\ell)$

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction?

Déterminons la limite de la suite (v_n) :
$\ell = 1,06\ell(1-\ell)$
$\ell = 1,06\ell - 1,06\ell^2$
$1,06\ell^2 + \ell - 1,06\ell = 0$
$1,06\ell^2 - 0,06\ell = 0$
$\ell(1,06\ell - 0,06) = 0$
Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Donc : $\ell = 0$ ou $1,06\ell - 0,06 = 0$
$\ell = 0$ ou $\ell = \frac{0{,}06}{1{,}06} = \frac{3}{53}$
On sait que la suite (v_n) est croissante de premier terme $v_{10} = 0,032$ donc elle ne peut pas converger vers 0.
On en déduit qu'elle converge vers $\ell = \frac{3}{53} \approx 0,057$.
Avec ce modèle, le nombre de tortues augmentera au fil du temps jusqu'à tendre vers 57.
La population de tortues n'est donc plus en voie d'extinction.

Exercice 3 :
Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - e^{\frac{-a}{80}t}\right)$$
où :
- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre.
- t désigne le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure.
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure.
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.
En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : Etude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7 et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$C(t) = 12\left(1 - e^{\frac{-7}{80}t}\right)$$

1. Etudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[$, on a : $C(t) = 12\left(1 - e^{\frac{-7}{80}t}\right) = 12 - 12\,e^{\frac{-7}{80}t}$
Donc : $C'(t) = -12 \times \frac{-7}{80}\, e^{\frac{-7}{80}t} = \frac{21}{20}\, e^{\frac{-7}{80}t}$
$\frac{21}{20} > 0$ et : $\forall\, t \in [0\,;+\infty[$, $e^{\frac{-7}{80}t} > 0$ donc $C'(t) > 0$.
On en déduit que la fonction C est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

$\forall\ t \in [0\ ;+\infty[$, on a : $C(t) = 12(1 - e^{\frac{-7}{80}\ t})$
On sait que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{-7}{80} t = -\infty$ et : $\lim\limits_{T \to -\infty} e^T = 0$
On en déduit, par composée de limites : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\frac{-7}{80}\ t} = 0$
Par différence, on obtient : $\lim\limits_{t \to +\infty} (1 - e^{\frac{-7}{80}\ t}) = 1$
Par produit, on obtient : $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 12(1 - e^{\frac{-7}{80}\ t}) = 12$.
Le plateau est la limite en $+\infty$ de la fonction C.
Il est différent de 15 donc le traitement n'est pas efficace pour ce patient.

<u>Partie B</u> : Détermination d'un traitement adéquat.

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut déterminer la clairance a de ce patient.
A cette fin, on règle provisoirement le débit d à 112, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}(1 - e^{\frac{-a}{80}\ t})$$

1. Détermination de la clairance.

   Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 $\mu mol.h^{-1}$. Au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament. Elle est égale à $6,8\ \mu mol.L^{-1}$.

   a) Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 112(1 - e^{\frac{-3}{40}\ x}) - 6,8x$.
   Justifier que la clairance a du patient vérifie $f(a) = 0$.

On a : $d = 112$ et $C(6) = 6,8$
On en déduit : $\frac{112}{a}(1 - e^{\frac{-a}{80} \times 6}) = 6,8 \iff 112(1 - e^{\frac{-6}{80}\ a}) = 6,8a \iff 112(1 - e^{\frac{-3}{40}\ a}) - 6,8a = 0$

   b) On admet que f est strictement décroissante sur $[5\ ;+\infty[$.
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[5\ ;+\infty[$.

f est continue et strictement décroissante sur $[5\ ;+\infty[$.
Le tableur de la calculatrice fournit : $f(5) \approx 1,02 > 0$ et $f(6) \approx -0,21 < 0$
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[5\ ;6]$.
f étant strictement décroissante sur $[5\ ;+\infty[$, on a : $\forall\ x \in [6\ ;+\infty[$, $f(x) \leq f(6) < 0$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[5\ ;+\infty[$.

   c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution. Interpréter ce résultat.

<u>Méthode</u> : En utilisant :

- le tableur de la calculatrice et la méthode de balayage
- ou l'algorithme de dichotomie
- ou la touche ROOT (F1) dans le menu G-Solv (SHIFT+F5) de résolution graphique sur Casio
- ou la commande 2:zero dans le menu CALC de résolution graphique sur TI

On obtient : $a \approx 5,85$
On en déduit que la clairance du patient est d'environ $5,85\ L.h^{-1}$.

2. Réglage du débit.

a) Déterminer la limite ℓ de la fonction C en $+\infty$ en fonction du débit d et de la clairance a.

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[$, on a : $C(t) = \frac{d}{a}(1 - e^{\frac{-a}{80}t})$

On sait que la clairance a est un paramètre strictement positif donc : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-a}{80}t = -\infty$

De plus : $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0$. Donc, par composée de limites : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\frac{-a}{80}t} = 0$

Par différence, on obtient : $\lim\limits_{t\to+\infty} (1 - e^{\frac{-a}{80}t}) = 1$

Par produit, on obtient : $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{d}{a}(1 - e^{\frac{-a}{80}t}) = \frac{d}{a}$.

b) La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ. Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être égale à 15 $\mu mol.L^{-1}$.

En déduire le débit d, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est la valeur déterminée dans la question 1.

Le débit d doit être réglé, en fonction de la clairance a du patient de sorte que le plateau $\frac{d}{a}$ soit égal à 15.

A la question 1. c) nous avons déterminé : $a \approx 5,85$

On en déduit : $\frac{d}{5,85} = 15 \quad\Leftrightarrow\quad d \approx 15 \times 5,85 \approx 87,75\ \mu mol.h^{-1}$.

Exercice 4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k})$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec d_1 et d_2 et orthogonale avec ces deux droites.

Partie A :

1. On pose A le point de d_1 de paramètre $t = 0$ et B le point de d_2 de paramètre $t' = 0$.
Déterminer les coordonnées de A et B.

A est le point de d_1 de paramètre $t = 0$ donc : $\begin{cases} x_A = 2 + 0 = 2 \\ y_A = 3 - 0 = 3. \\ z_A = 0 \end{cases}$ Ainsi, on a : $A(2\,;3\,;0)$

B est le point de d_2 de paramètre $t' = 0$ donc : $\begin{cases} x_B = -5 + 2 \times 0 = -5 \\ y_B = -1 + 0 = -1 \quad . \\ z_B = 5 \end{cases}$ Ainsi, on a : $B(-5\,;-1\,;5)$

2. Donner un vecteur directeur $\vec{u_1}$ de d_1 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$ de d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont elles parallèles ? Sont-elles coplanaires ?

d_1 est dirigée par $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d_2 est dirigée par $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1}$ donc les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires et les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes si et seulement si le système suivant admet un couple unique de solutions réelles (t, t') :

$$\begin{cases} 2 + t = -5 + 2t' \\ 3 - t = -1 + t' \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' = 2 + 5 + 5 \\ t' = 3 - 5 + 1 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' = 12 \\ t' = -1 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 6 \\ t' = -1 \\ t = 5 \end{cases}$$

$6 \neq -1$ donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes. En rappellant qu'elles ne sont pas non plus parallèles on en déduit qu'elles ne sont pas coplanaires.

Partie B :

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

On admet que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

1. Préciser la position relative de la droite d_1 et du plan $\mathscr{P}$.

On sait que $\mathscr{P}$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On remarque que $\vec{u}$ et le vecteur $\vec{u_1}$ directeur de d_1 sont égaux. On en déduit que d_1 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
Enfin, puisque A est un point commun à d_1 et au plan $\mathscr{P}$ alors on peut en conclure que d_1 est incluse dans $\mathscr{P}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

$\mathscr{P}$ est le plan passant par A(2 ; 3 ; 0) et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

On en déduit sa représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + k + k' \\ y = 3 - k - 2k' \\ z = k - 3k' \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$

3. Démontrer que la droite d_2 coupe le plan $\mathscr{P}$ au point C(3 ; 3 ; 5).

Pour démontrer que la droite d_2 coupe le plan $\mathscr{P}$ au point C(3 ; 3 ; 5) on peut démontrer que C appartient à la fois à d_2 et à $\mathscr{P}$ puis que d_2 n'est pas incluse dans $\mathscr{P}$.

$C \in d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -5 + 2t' \\ 3 = -1 + t' \\ 5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' = 8 \\ t' = 4 \\ 5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow t' = 4$

$C \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2 + k + k' \\ 3 = 3 - k - 2k' \\ 5 = k - 3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + k' = 1 \\ k = -2k' \\ k - 3k' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2k' + k' = 1 \\ k = -2k' \\ -2k' - 3k' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k' = 1 \\ k = -2k' \\ -5k' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = -1 \\ k = 2 \end{cases}$

Les deux systèmes ayant chacun une solution unique le point C appartient à d_2 et au plan $\mathscr{P}$.
On rappelle que B(-5 ; -1 ; 5) est aussi un point de d_2. Testons si B appartient également à $\mathscr{P}$:

$\begin{cases} -5 = 2 + k + k' & L_1 \\ -1 = 3 - k - 2k' & L_2 \\ 5 = k - 3k' & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 2 + k + k' & \\ -6 = 5 - k' & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -10 = 2 + 4k' & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 2 + k + k' \\ k' = 5 + 6 \\ 4k' = -10 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 2 + k + k' \\ k' = 11 \\ k' = \frac{-12}{4} = -3 \end{cases}$

$11 \neq -3$ Donc B n'appartient pas à $\mathscr{P}$. On en déduit que d_2 n'est pas incluse dans $\mathscr{P}$ et que le seul point d'intersection entre cette droite et ce plan est C.

Partie C :

Soit Δ la droite dirigée par le vecteur $\vec{v}$ et passant par C.

1. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.

Δ est la droite passant par C(3 ; 3 ; 5) et dirigé par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

On en déduit sa représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 + k'' \\ y = 3 - 2k'' \\ z = 5 - 3k'' \end{cases}$ avec $k'' \in \mathbb{R}$

2. Soit D le point d'intersection des droites Δ et d_1.

a) Déterminer les coordonnées de D.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection D de Δ et d_1 on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 2+t=3+k'' \\ 3-t=3-2k'' \\ t=5-3k'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+5-3k''=3+k'' \\ 3-5+3k''=3-2k'' \\ t=5-3k'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=4k'' \\ 5k''=5 \\ t=5-3k'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k''=1 \\ t=5-3=2 \end{cases}$$

On en déduit que D est le point de d_1 de paramètre t = 2. Ainsi : $\begin{cases} x_{\mathrm{D}}=2+2=4 \\ y_{\mathrm{D}}=3-2=1 \\ z_{\mathrm{D}}=2 \end{cases}$

b) Les triangles ACD et BCD sont-ils rectangles ?

On a : A(2 ; 3 ; 0) B(-5 ; -1 ; 5) C(3 ; 3 ; 5) et D(4 ; 1 ; 2).

On en déduit : $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\begin{pmatrix}9\\2\\-3\end{pmatrix}$

AD = $\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}$ AC = $\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ CD = $\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

On a : AD^2 + CD^2 = AC^2

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ACD est rectangle en D.

De même : BC = $\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}$ BD = $\sqrt{9^2+2^2+3^2}=\sqrt{94}$ CD = $\sqrt{14}$

On a : BC^2 + CD^2 = BD^2

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, BCD est rectangle en C.

3. Expliquer pourquoi Δ répond au problème posé.

On a montré que :

- A et D sont sur d_1 donc d_1 = (AD)
- C et D sont sur Δ donc Δ = (CD)
- B et C sont sur d_2 donc d_2 = (BC)

On en déduit que Δ coupe d_1 en D et d_2 en C.

De plus :

- ACD est rectangle en D donc Δ est perpendiculaire à d_1 en D
- BCD est rectangle en C donc Δ est perpendiculaire à d_2 en C

Finalement, on a pu trouver une droite Δ à la fois sécante avec d_1 et d_2 et orthogonale avec ces deux droites. Donc Δ répond au problème.

Exercice 5 : Les parties A et B sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A :

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %. À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à $0,98$.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est $0,95$.

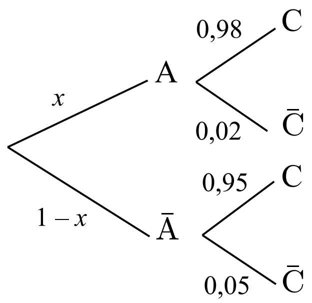
À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

- A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A »
- C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$

On peut modéliser la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



On en déduit :

$P(C) = P(A \cap C) + P(\bar{A} \cap C) = P(A) \times P_A(C) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(C)$

$P(C) = 0,98x + 0,95(1-x) = 0,98x + 0,95 - 0,95x = 0,03x + 0,95$

2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est le double de celle que la tablette provienne de la chaîne A.

À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables. Donc $P(C) = 0,96$

On en déduit : $0,03x + 0,95 = 0,96 \Leftrightarrow 0,03x = 0,01 \Leftrightarrow x = \frac{0,01}{0,03} = \frac{1}{3}$

Ainsi : $P(A) = x = \frac{1}{3}$ et : $P(B) = 1 - x = \frac{2}{3}$

La probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est le double de celle qu'elle provienne de la chaîne A.

<u>Partie B</u> : QCM

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.
Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible. Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,02$.

1. Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?
a) $0,26$ b) $0,08$ c) $0,92$ d) On ne peut pas répondre car il manque des données

Lorsqu'on prélève au hasard un bonbon issu de la machine A, il n'y a que deux issues possibles : soit il est déformé, soit il ne l'est pas. C'est une épreuve de Bernoulli. La probabilité qu'il soit déformé est $0,02$.
On prélève 50 bonbons dans des conditions d'indépendance et on obtient un schéma de Bernoulli.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonbons déformés, parmi les 50. X prend des valeurs entières entre 0 et 50 donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50 ; 0,02)$.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,26$

La bonne réponse est la a)

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,05$. Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

2. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?
a) $0,05$ b) $0,67$ c) $0,83$ d) $0,44$

Pour répondre à cette question il faut calculer $P_D(B)$, en notant D l'évènement « le bonbon est déformé ».

$P(A) = \frac{1}{3}$ donc $P(B) = \frac{2}{3}$

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = \frac{1}{3} \times 0,02 + \frac{2}{3} \times 0,05 = \frac{0,12}{3} = 0,04$

$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0,05}{0,04} = \frac{5}{6} \approx 0,83$

La bonne réponse est la c)