Série S **06 février 2019**
Durée de l'épreuve : 4 h

Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement spécifique -

(Sujet de rattrapage)

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>*Exercice 1*</u> : (5 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie par :
u_0 = -1, $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel *n* : $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) est ni arithmétique ni géométrique.

2) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel *n* : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
   a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   b) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   c) Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de *n*.

3) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel *n* : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
   a) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   b) En déduire que pour tout entier naturel *n* : $w_{n+1} = w_n + 2$.
   c) Calculer w_0 puis exprimer w_n en fonction de *n*.

4) Montrer que pour tout entier naturel *n* : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5) Pour tout entier naturel *n* on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

Exercice 2 : **(4 points)**

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$$

1) Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \qquad z_B = 1 - i \qquad z_C = 3 - i$$

1) a) Placer A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2) a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z du plan complexe tels que $|z - 2| = \sqrt{2}$.

b) Vérifier que les points A, B, C et D appartiennent à $\mathcal{E}$.

Exercice n°3 : **(3 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.

Chaque réponse correcte rapporte un point .Un réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ,\vec{j} ,\vec{k})$.

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A(1 ;-1 ;2), B(3 ;3 ;8), C(-3 ;5 ;4) et D(-1 ;1 ;6).

On note Δ la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = k + 1 \\ y = 2k - 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$,

et Δ' la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = k' + 1 \\ y = k' + 3 \\ z = -k' + 4 \end{cases}$ $k' \in \mathbb{R}$,

1. **a.** Les points A, D et C sont alignés
   b. Le triangle ABC est rectangle en A.
   c. Le triangle ABC est équilatéral.
   d. Le point D est le milieu du segment [AB].

2. **a.** Les droites Δ et Δ' sont parallèles.
   b. Les droites Δ et Δ' sont coplanaires.
   c. Le point D appartient à la droite Δ.
   d. Le point D appartient à la droite Δ'.

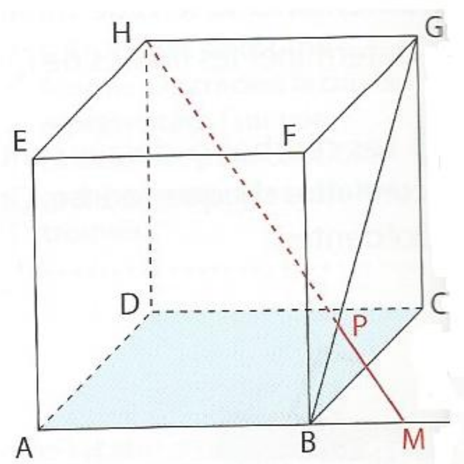
3. **a.** Le plan ABC a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 3t - 3t' \\ y = -1 + 3t + 5t' \\ z = 2 + 8t + 4t' \end{cases}$
   b. Le plan ABC et la droite Δ sont sécants en A
   c. Le plan ABC est parallèle à la droite Δ.
   d. Le plan ABC est parallèle à la droite Δ'.

Exercice n°4 : **(3 points)**

Partie A : On considère la fonction f définie sur ℝ-{-6} par $f(x) = 6\sqrt{2}\,\frac{x}{x+6}$.

1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer f'(x)
3. En déduire le tableau des variations de la fonction f

Partie B :



Le cube ABCDEFGH a pour côté 6cm. A tout réel x strictement positif on associe le point M de la demi-droite [AB) tel que BM=x et M∉[AB].

1. Justifier que les droites (HM) et (BG) sont sécantes en un point que l'on notera P.
2. Exprimer la distance BP en fonction de x.
3. Lorsque le point M s'éloigne du point B sur la demi droite [AB), quelle sera la position limite du point P ?

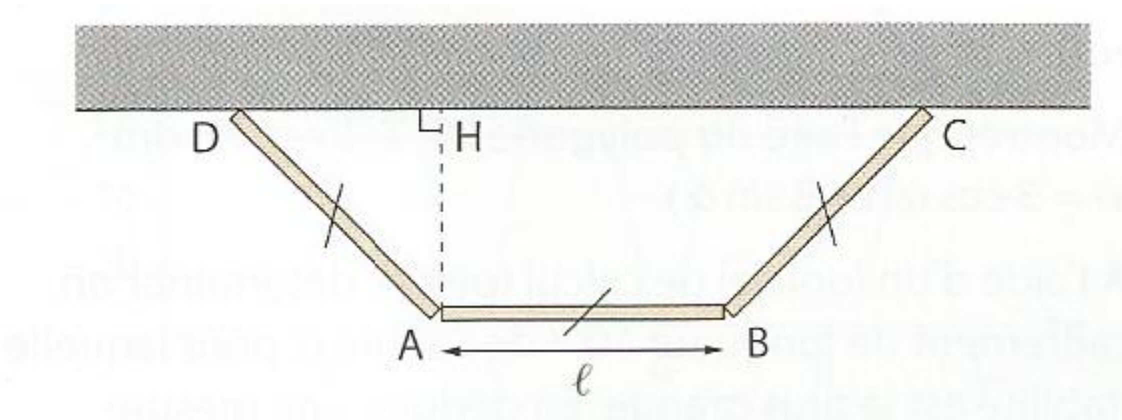
<u>Exercice n°5</u> **(5 points)**

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g(x) = (1+cosx)sinx. On note C_g sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer g(-x) et g(x+2π) en fonction de g(x).Que peut-on dire de la fonction g ?
2. Justifier pourquoi il suffit d'étudier g sur [0 ; π].
3. Calculer g'(x).Prouver que g'(x)= (2cosx-1)(cosx+1)
4. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur [0 ; π].
5. Construire l'allure de C_g sur [-π ; π] dans un repère orthogonal.

Partie B

On souhaite créer le long d'un mur un massif de fleurs que l'on protègerait par une bordure (on ne met pas de bordure le long du mur).On dispose de trois morceaux de bois de même longueur ℓ =1 pour former cette bordure qui délimite un massif ayant la forme d'un trapèze isocèle .



Soit α une mesure en radians de l'angle $\widehat{ADC}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Exprimer la hauteur AH et la longueur DC en fonction de α.
2. Montrer que l'aire du massif est donnée en fonction de α par A(α) = (1+cosα)sinα.
3. Déduire de la partie A, l'aire maximale du massif ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$ en radians puis en degrés.

Correction du Bac Blanc du 6 février 2019

Exercice 1 :

1) $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

Donc : $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

On a : $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Et : $u_1 - u_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Donc : $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

On en déduit que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

On a : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$

Et : $\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

On en déduit que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) = \frac{1}{2}v_n$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q\ v_n$ avec $q = \frac{1}{2}$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

c) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Puisque la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$ alors :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2\frac{v_n}{v_n} + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$

c) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$

On en déduit que la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = 2$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + rn = -1 + 2n$

4) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n\ v_n = (-1 + 2n) \times \frac{1}{2^n} = \frac{2n-1}{2^n}$

5) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ » est vraie.

- Initialisation :

Si $n = 0$ alors :

D'une part : $S_0 = u_0 = -1$

D'autre part : $2 - \frac{2\times 0+3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$

Donc : $S_0 = 2 - \frac{2\times 0+3}{2^0}$ Ainsi, $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- Hérédité :

Soit $n \geq 0$.

Montrons que si $\mathscr{P}_n$ est vraie alors $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi, c-à-d : $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$.

$\mathscr{P}_n$ est vraie $\Rightarrow S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = 2 - \frac{2n+3}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} u_k = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u_{n+1}$

$\mathscr{P}_n$ est vraie $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} u_k = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u_{n+1}$

Or : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

Donc : $u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = \frac{2n+2-1}{2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(2n+3)}{2^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-4n-6+2n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

Donc : $\mathscr{P}_n$ est vraie $\Rightarrow S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

Or : $2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+2+3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

Donc : $\mathscr{P}_n$ est vraie $\Rightarrow S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.

- Conclusion :

$\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Exercice 2 :

Partie A : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - (2+i\sqrt{2})z^2 + 2(1+i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$

1) $P(i\sqrt{2}) = (i\sqrt{2})^3 - (2+i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + 2(1+i\sqrt{2})i\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

$P(i\sqrt{2}) = i^2 i(\sqrt{2})^2\sqrt{2} - (2+i\sqrt{2})i^2(\sqrt{2})^2 + 2(1+i\sqrt{2})i\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

$P(i\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}i + 2(2+i\sqrt{2}) + 2(1+i\sqrt{2})i\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

$P(i\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}i + 4 + 2\sqrt{2}i + (2+2\sqrt{2}i)i\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

$P(i\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}i + 2(\sqrt{2})^2 i^2 - 2i\sqrt{2}$

$P(i\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}i - 4 - 2\sqrt{2}i = 0$

2) a) Puisque $i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$ alors il existe deux réels a et b tels que :

$\forall\, z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$

$P(z) = z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - i\sqrt{2}az - i\sqrt{2}b$

$P(z) = z^3 + (a - i\sqrt{2})z^2 + (b - i\sqrt{2}a)z - i\sqrt{2}b$

Or : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - (2+i\sqrt{2})z^2 + 2(1+i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$

On en déduit que a et b sont les solutions du système :

$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -(2+i\sqrt{2}) \\ b - i\sqrt{2}a = 2(1+i\sqrt{2}) \\ -i\sqrt{2}b = -2i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - i\sqrt{2} = -2 - i\sqrt{2} \\ b - i\sqrt{2}a = 2 + 2i\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ 2 - i\sqrt{2}a = 2 + 2i\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ 2 + 2i\sqrt{2} = 2 + 2i\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Finalement : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2)$.

b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$

On calcule le discriminant du trinôme $z^2 - 2z + 2$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

On en déduit que le trinôme $z^2 - 2z + 2$ admet deux racines complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$ et : $z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

Finalement : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ ou $z = 1 - i$ ou $z = 1 + i$

Partie B :

1) a) Figure en fin d'exercice.

b) $z_A = 1 + i$ $z_B = 1 - i$ $z_C = 3 - i$

On en déduit :

- $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = 1 - i - 1 - i = -2i$ Donc : $AB = |z_{\vec{AB}}| = |-2i| = 2$
- $z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = 3 - i - 1 - i = 2 - 2i$ Donc : $AC = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$
- $z_{\vec{BC}} = z_C - z_B = 3 - i - 1 + i = 2$ Donc : $BC = |2| = 2$

On a : $AB^2 + BC^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 = AC^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Et puisque AB = BC, alors le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

c) ABCD est un parallélogramme ⇔ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ⇔ $z_{\vec{AD}} = z_{\vec{BC}}$ ⇔ $z_D - z_A = 2$

$z_D - z_A = 2$ ⇔ $z_D - 1 - i = 2$ ⇔ $z_D = 2 + 1 + i$ ⇔ $z_D = 3 + i$

2) a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z du plan complexe tels que $|z - 2| = \sqrt{2}$.

En notant Ω le point d'affixe 2 on obtient : $M(z) \in \mathscr{E}$ ⇔ $|z - z_\Omega| = \sqrt{2}$ ⇔ $\Omega M = \sqrt{2}$.

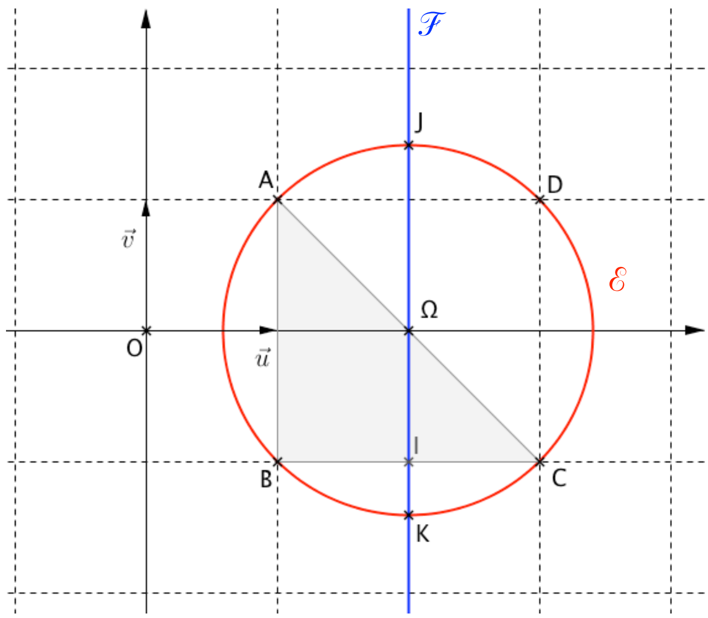
On en déduit que $\mathscr{E}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}$.

b) $|z_A - 2| = |1 + i - 2| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ Donc $A \in \mathscr{E}$

$|z_B - 2| = |1 - i - 2| = |-1 - i| = \sqrt{-(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ Donc $B \in \mathscr{E}$

$|z_C - 2| = |3 - i - 2| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ Donc $C \in \mathscr{E}$

$|z_D - 2| = |3 + i - 2| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ Donc $D \in \mathscr{E}$



Exercice 3 :

1 – C (le triangle ABC est équilatéral)

Eléments de démonstration (non demandée) :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\3+1\\8-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ Donc $AB=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{56}$

De même : $AC=BC=\sqrt{56}$

2 – D (le point D appartient à Δ')

Eléments de démonstration (non demandée) :

En remplaçant x, y et z par les coordonnées de D dans la représentation paramétrique de Δ' on obtient :

$\begin{cases}-1=k'+1\\1=k'+3\\6=-k'+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k'=-2\\k'=-2\\k'=-2\end{cases}$ Donc D est le point de Δ' de paramètre -2.

3 – C (le plan ABC est parallèle à la droite Δ)

Eléments de démonstration (non demandée) :

En remplaçant x, y et z par les coordonnées de A dans la représentation paramétrique de Δ on obtient $k = 0$.
Donc A est un point qui appartient à la fois à Δ et au plan ABC.

On peut vérifier que Δ est incluse dans le plan ABC en montrant que le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ de Δ et

les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$ sont coplanaires.

(On peut aussi montrer qu'un 2ème point de Δ, en particulier le point B, appartient au plan ABC).
Δ étant incluse dans le plan ABC, le plan ABC est parallèle à Δ.

Exercice 4 :

Partie A : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-6\},\ f(x)=6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6}$.

1) Recherche des limites de f à gauche et à droite en -6 :

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x<-6}} x=-6$

$x < -6 \iff x + 6 < 0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x<-6}} x+6=0^-$

Donc, par quotient de limites : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x<-6}} \dfrac{x}{x+6}=+\infty$. Or : $6\sqrt{2}>0$ Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x<-6}} (6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6})=+\infty$

$x > -6 \iff x + 6 > 0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x>-6}} x+6=0^+$ On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x>-6}} \dfrac{x}{x+6}=-\infty$ et : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x>-6}} (6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6})=-\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x<-6}} f(x)=+\infty$ et : $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\x>-6}} f(x)=-\infty$

Recherche des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x+6}=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x}=1$ On en déduit : $\lim\limits_{x\to -\infty} (6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6})=6\sqrt{2}$

De même, puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+6}=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x}=1$ Alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} (6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6})=6\sqrt{2}$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=6\sqrt{2}$ et : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=6\sqrt{2}$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-6\},\ f(x) = 6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6} = 6\sqrt{2}\dfrac{u(x)}{v(x)}$

Donc : $f'(x) = 6\sqrt{2}\dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = x+6 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$f'(x) = 6\sqrt{2}\dfrac{x+6-x}{(x+6)^2} = 6\sqrt{2}\dfrac{6}{(x+6)^2} = \dfrac{36\sqrt{2}}{(x+6)^2}$

3) $36\sqrt{2} > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-6\},\ (x+6)^2 > 0$ donc f' est positive sur $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$6\sqrt{2} \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 6\sqrt{2}$

Partie B :

1) ABCDEFGH est un cube donc les arêtes [GH] et [AB] sont parallèles.
Le point M appartenant à la demi-droite [AB), on en déduit que les droites (BM) et (HG) sont parallèles.
Ainsi, les points B, M, G et H sont coplanaires. Donc les droites (HM) et (BG) sont coplanaires.
Puisque le point M appartient à la demi-droite [AB) sans appartenir au segment [AB] alors BMHG est un quadrilatère croisé. On en déduit que les droites (HM) et (BG) sont sécantes en un point P.

2) Les points B, P et G sont alignés dans le même ordre que les points M, P et H.
De plus, les droites (BM) et (GH) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{PB}}{\text{PG}} = \frac{\text{PM}}{\text{PH}} = \frac{\text{GH}}{\text{BM}}$$

$$\frac{\text{BP}}{\text{PG}} = \frac{x}{6}$$

P ∈ [BG] donc : PG = BG – BP.
On en déduit :

$$\frac{\text{BP}}{\text{BG} - \text{BP}} = \frac{x}{6}$$

BFGC est un carré donc le triangle BCG est rectangle et isocèle en C.
On applique le théorème de Pythagore :

$\text{BG}^2 = \text{BC}^2 + \text{CG}^2$

$\text{BG}^2 = 6^2 + 6^2$ (*Remarque* : on peut admettre que la diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$)

$\text{BG} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

Ainsi :

$$\frac{\text{BP}}{6\sqrt{2} - \text{BP}} = \frac{x}{6}$$

On utilise le produit en croix :

$6\,\text{BP} = (6\sqrt{2} - \text{BP})x$

$6\,\text{BP} = 6\sqrt{2}\,x - \text{BP}\,x$

$6\,\text{BP} + \text{BP}\,x = 6\sqrt{2}\,x$

$(6+x)\text{BP} = 6\sqrt{2}\,x$

$\text{BP} = 6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6}$

3) La longueur BP est définie par la fonction *f* étudiée dans la partie A.

On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6\sqrt{2}$

On en déduit, que lorsque le point M s'éloigne du point B sur la demi-droite [AB), c'est-à-dire lorsque BM = x tend vers +∞, la longueur BP tend vers $6\sqrt{2}$. Or : BG = $6\sqrt{2}$. La position limite de P est donc G.

Exercice 5 :

Partie A : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=(1+\cos x)\sin x$

1) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x)=(1+\cos(-x))\sin(-x)=(1+\cos x)\times(-\sin x)=-(1+\cos x)\sin x=-g(x)$

On en déduit que g est une fonction impaire.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x+2\pi \in \mathbb{R}$ et $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+2\pi)=(1+\cos(x+2\pi))\sin(x+2\pi)=(1+\cos x)\sin x=g(x)$

On en déduit que g est une fonction 2π périodique.

2) Puisque g est 2π périodique, on peut construire sa représentation graphique en appliquant des translations de vecteurs $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$ à partir du tracer de $\mathscr{C}g$ sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple sur $[-\pi ; \pi]$.
Puisque g est impaire, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.
On peut donc restreindre l'étude de g sur $[0 ; \pi]$.

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=(1+\cos x)\sin x=u(x)v(x)$

Donc : $g'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$ avec : $\begin{cases} u(x)=1+\cos x \\ v(x)=\sin x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x)=-\sin x \\ v'(x)=\cos x \end{cases}$

$g'(x)=-\sin x \times \sin x+(1+\cos x)\cos x$

$g'(x)=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x$

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x+\sin^2 x=1$ On en déduit : $\cos^2 x-1=-\sin^2 x$

Donc : $g'(x)=\cos^2 x-1+\cos x+\cos^2 x=2\cos^2 x+\cos x-1$

D'autre part : $(2\cos x-1)(\cos x+1)=2\cos^2 x+2\cos x-\cos x-1=2\cos^2 x+\cos x-1$

Ainsi : $g'(x)=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

4) Pour étudier les variations de g on étudie le signe de $g'(x)$.

$2\cos x-1=0$

$2\cos x=1$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\cos x=\cos\dfrac{\pi}{3}$

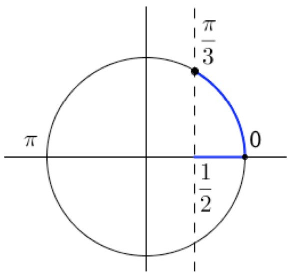
$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2k'\pi \end{cases}$

Sur $[0 ; \pi]$:
$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$

$2\cos x-1>0$

$2\cos x>1$

$\cos x>\dfrac{1}{2}$



Sur $[0 ; \pi]$:
$2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in [0 ; \frac{\pi}{3}]$
$2\cos x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{3} ; \pi]$

$\cos x+1=0$

$\cos x=-1$

$\cos x=\cos\pi$

$\begin{cases} x=\pi+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\pi+2k'\pi \end{cases}$

Sur $[0 ; \pi]$: $\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pi$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq -1$
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x + 1 \geq 0$

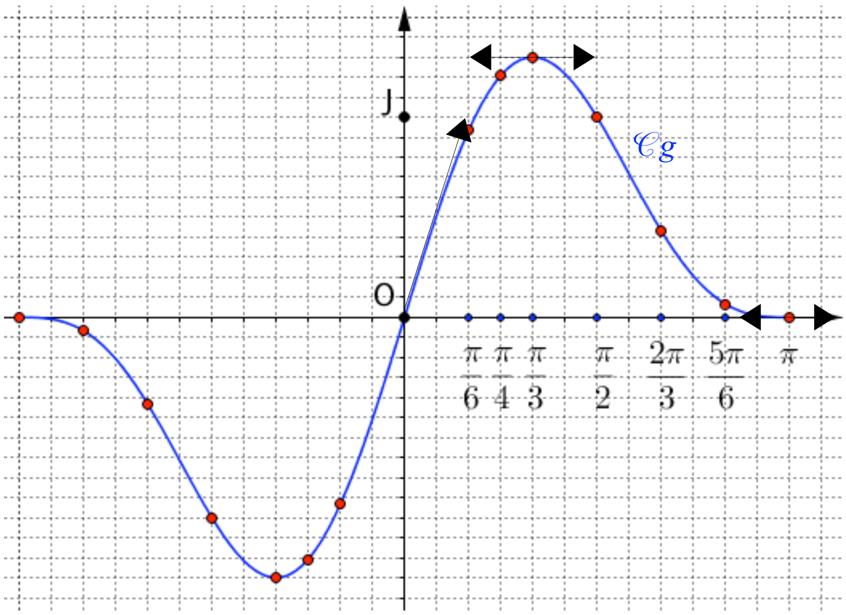
On en déduit le tableau de signes de $g'(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\cos x - 1$	1	+	0	–	
$\cos x + 1$	2	+		+	0
$g'(x)$	2	+	0	–	0

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$	2	+	0	–	0
g	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

5)



Partie B :

1) $\sin\alpha = \sin\widehat{ADC} = \sin\widehat{ADH} = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AH}{1} = AH$

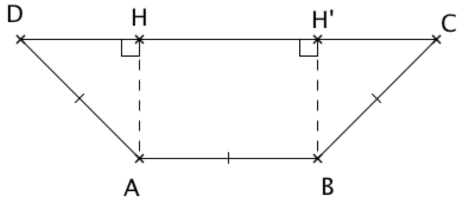
Donc: $AH = \sin\alpha$

Soit H' le projeté orthogonal de B sur (DC).

Puisque ABCD est un trapèze isocèle, les triangles rectangles AHD et BH'C sont identiques.

De plus, ABH'H est un rectangle.

On en déduit : DC = DH + HH' + H'C = 2 DH + AB = 2 DH + 1



Or : $\cos\alpha = \cos\widehat{ADC} = \cos\widehat{ADH} = \dfrac{DH}{AD} = DH$

Donc: $DH = \cos\alpha$

Finalement : DC = 2 cos α + 1

2) L'aire d'un trapèze est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}(b + B)\,h$

où b, B et h désignent respectivement la petite base, la grande base et la hauteur.

Donc : $\mathscr{A}\,(\alpha) = \frac{1}{2}(AB + DC)\,AH = \frac{1}{2}(1 + 2\cos\alpha + 1)\sin\alpha = \frac{1}{2}(2 + 2\cos\alpha)\sin\alpha = (1 + \cos\alpha)\sin\alpha$

3) L'aire du massif est définie par la fonction g étudiée dans la partie A.

D'après le tableau de variations de g, l'aire maximale du massif est atteinte pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad (soit 60°).

Cette aire maximale est : $\mathscr{A}\,(\frac{\pi}{3}) = g\,(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.