Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement de spécialité -

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice **: (6 points)**

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A :

Un producteur de légumes souhaite s'implanter à Pau et livrer directement chez le consommateur des paniers de légumes variés labélisés « bio ». La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois.

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

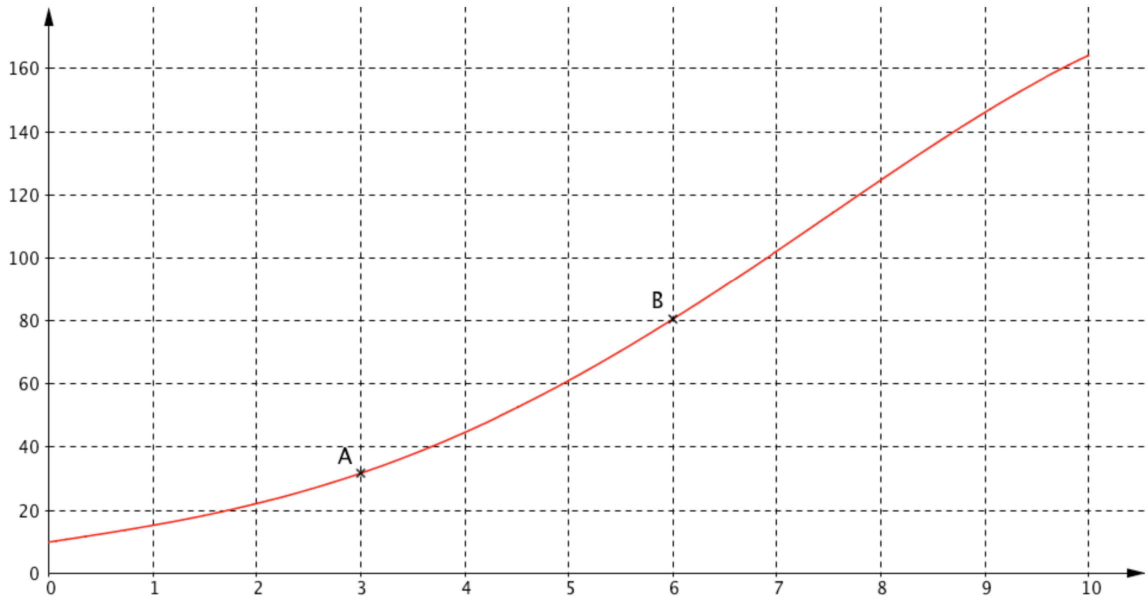
$$C(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 10$$

où x est exprimé en centaines de paniers et $C(x)$ exprimé en centaines d'euros.

On admet que pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 10], le coût marginal est donné par $C_m = C'$.

Le coût marginal pour 600 paniers vendus est de 2 075 euros.

Les points A (3 ; 31,75) et B (6 ; 80,5) appartiennent à la courbe représentative $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous.



1. Montrer que le triplet $(a ; b ; c)$ est solution du système : $\begin{cases} 81a + 27b + 3c = 21,75 \\ 1296a + 216b + 6c = 70,5 \\ 864a + 108b + c = 20,75 \end{cases}$

2. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ecrire le système précédent sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont deux matrices à expliciter.

3. Exprimer la matrice X à l'aide des matrices M et Y puis déterminer le triplet $(a ; b ; c)$ à l'aide de la calculatrice.

4. A partir de cette modélisation, déterminer le coût total pour la production de 750 paniers.

Partie B :

Le graphe donné en *Annexe 2* indique les lieux de résidence des différents clients du producteur (notés de A à N) ainsi que les chemins que le livreur des paniers de légumes a l'habitude d'emprunter.

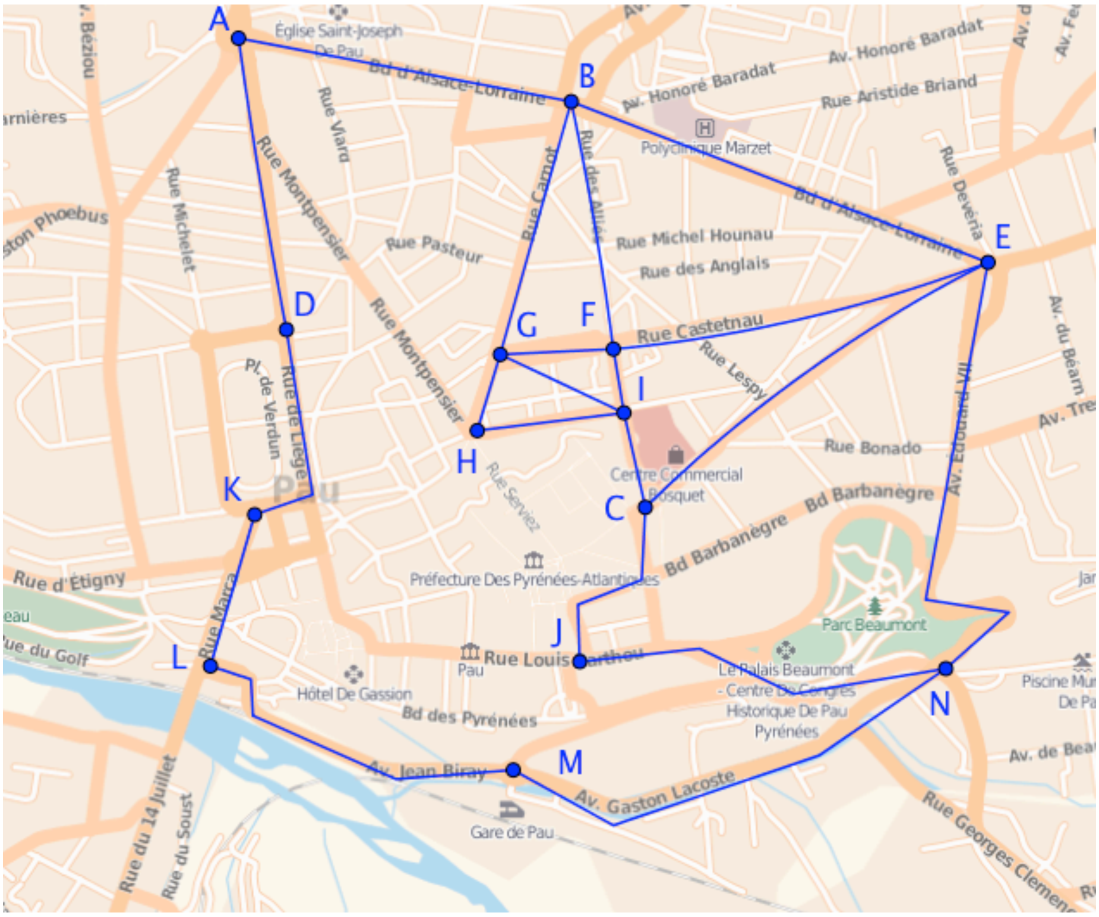
1. Ce graphe est-il complet ? Justifier.
2. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.
3. Existe-t-il un circuit permettant au livreur d'approvisionner tous ses clients en passant par tous les chemins, une et une seule fois, dans les cas suivants ?

   a) Le point de départ est le même que celui d'arrivée. Justifier.

   b) Les points de départ et d'arrivée sont distincts. Justifier.

   c) Dans le cas où un tel circuit existe, indiquer le trajet à emprunter.

Annexe 2



Correction de l'exercice de spécialité maths

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A :

Un producteur de légumes souhaite s'implanter à Pau et livrer directement chez le consommateur des paniers de légumes variés labélisés « bio ». La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois.

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

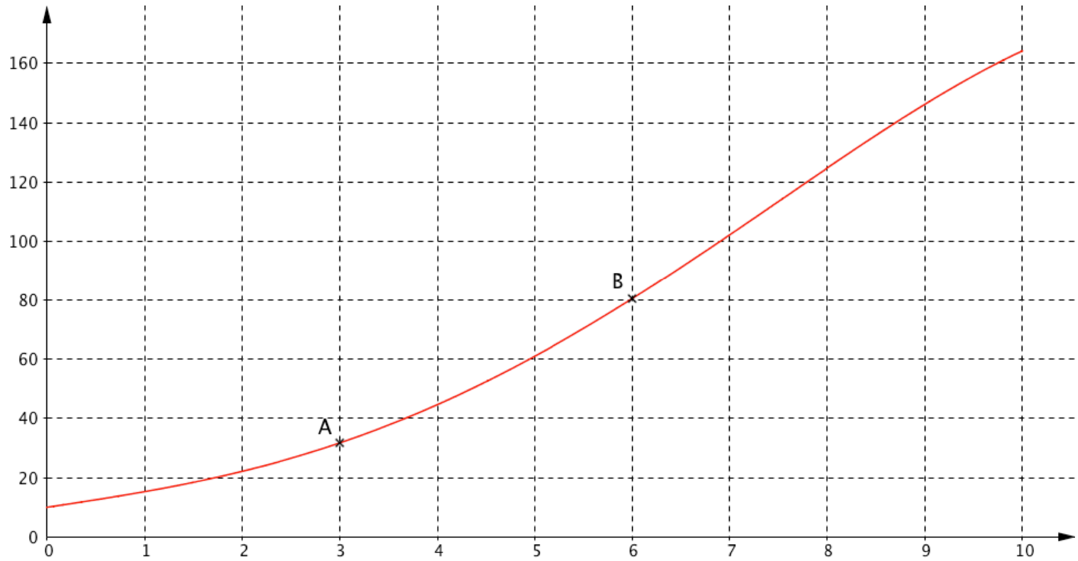
$$C(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 10$$

où x est exprimé en centaines de paniers et $C(x)$ exprimé en centaines d'euros.

On admet que pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 10], le coût marginal est donné par $C_m = C'$.

Le coût marginal pour 600 paniers vendus est de 2 075 euros.

Les points A (3 ; 31,75) et B (6 ; 80,5) appartiennent à la courbe représentative $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous.



2. $\forall\ x \in [0\ ;\ 10]$, $C(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 10$

   A (3 ; 31,75) $\in \mathscr{C}$ donc : $C(3) = 31{,}75$

   donc : $3^4a + 3^3b + 3c + 10 = 31{,}75$

   $81a + 27b + 3c = 31{,}75 - 10$

   $81a + 27b + 3c = 21{,}75$

   B (6 ; 80,5) $\in \mathscr{C}$ donc : $C(6) = 80{,}5$

   donc : $6^4a + 6^3b + 6c + 10 = 80{,}5$

   $1296a + 216b + 6c = 80{,}5 - 10$

   $1296a + 216b + 6c = 70{,}5$

   Enfin, le coût marginal est donné par $C_m = C'$et le coût marginal pour 600 paniers vendus est de 2 075 euros. On en déduit $C_m(6) = 20{,}75$

   Or : $C_m(x) = C'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c$ Donc : $4 \times 6^3a + 3 \times 6^2b + c = 20{,}75$

   $864a + 108b + c = 20{,}75$

   Finalement, le triplet $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est solution du système : $\begin{cases} 81a + 27b + 3c = 21,75 \\ 1296a + 216b + 6c = 70,5 \\ 864a + 108b + c = 20,75 \end{cases}$

2. En posant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on a : $\begin{cases} 81a + 27b + 3c = 21,75 \\ 1296a + 216b + 6c = 70,5 \\ 864a + 108b + c = 20,75 \end{cases} \Leftrightarrow \quad MX = Y$

   avec $M = \begin{pmatrix} 81 & 27 & 3 \\ 1296 & 216 & 6 \\ 864 & 108 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 21,75 \\ 70,5 \\ 20,75 \end{pmatrix}$

3. $MX = Y \quad \Leftrightarrow \quad X = M^{-1}Y$

La calculatrice permet d'obtenir $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{162} & \frac{-11}{2592} & \frac{1}{144} \\ \frac{-1}{18} & \frac{31}{864} & \frac{-7}{144} \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{24} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ puis $X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{48} \\ \frac{5}{16} \\ 5 \end{pmatrix}$

On en déduit : $a = \frac{-1}{48}$ $\qquad b = \frac{5}{16}$ $\qquad c = 5$

4. $\forall\, x \in [0\,;10]$, $C(x) = \frac{-1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10$

$C(7,5) = \frac{-1}{48}\times 7,5^4 + \frac{5}{16}\times 7,5^3 + 5 \times 7,5 + 10 \approx 113{,}42$

On en déduit que le coût total pour la production de 750 paniers est de 11 342 €.

Partie B :

Le graphe donné en *Annexe 2* indique les lieux de résidence des différents clients du producteur (notés de A à N) ainsi que les chemins que le livreur des paniers de légumes a l'habitude d'emprunter.

1. Le graphe n'est pas complet car tous ses sommets ne sont pas adjacents 2 à 2.
Par exemple, B et D ne sont pas adjacents.
2. Le graphe est connexe car la chaine A – D – K – L – M – N – E – B – G – H – I – F – G – I – C – J permet de relier tous les sommets.
3. Existe-t-il un circuit permettant au livreur d'approvisionner tous ses clients en passant par tous les chemins, une et une seule fois, dans les cas suivants ?

a) D'après le théorème d'Euler, le graphe n'admet pas de cycle eulérien car tous ses sommets ne sont pas de degrés pairs. Il n'existe donc pas de circuit permettant au livreur d'approvisionner tous ses clients en passant par tous les chemins, une et une seule fois et de sorte que le point de départ soit le même que celui d'arrivée.

b) D'après le théorème d'Euler, le graphe admet une chaîne eulérienne car il admet exactement deux sommets de degrés impairs : C et N. Il existe donc un circuit permettant au livreur d'approvisionner tous ses clients en passant par tous les chemins, une et une seule fois mais dans ce cas, les points de départ et d'arrivée sont distincts.

c) Dans le cas où la chaine eulérienne existe, les seuls trajets possibles sont de C vers N ou de N vers C (au départ et à l'arrivée des deux seuls sommets de degrés impairs).
Par exemple, la chaîne : N – J – C – E – N – M – L – K – D – A – B – E – F – G – I – H – G – B – F – I – C est eulérienne.