Série ES **18 mai 2016**
Durée de l'épreuve : 3 h

Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement spécifique -
Coefficient 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (5 points)

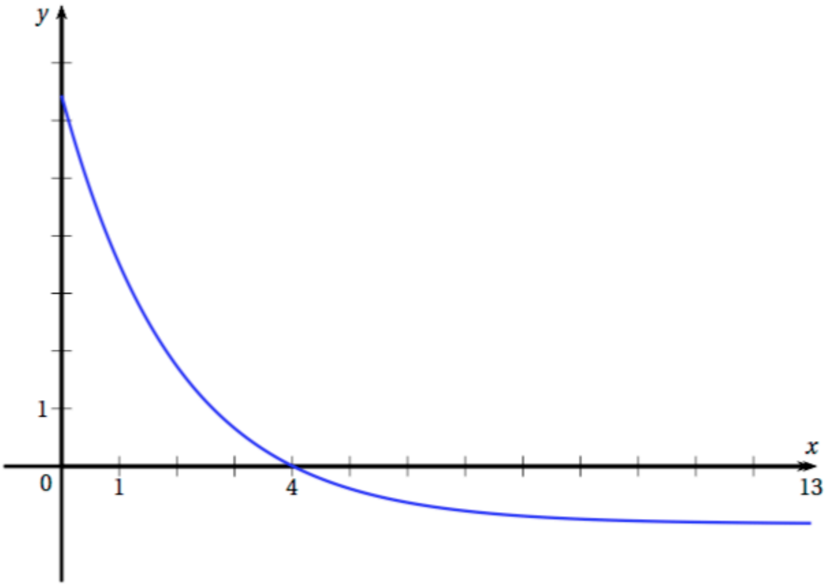
Pour chacune des propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction *f* définie sur l'intervalle [-3 ; 1].

x	-3		-1		0		1
f	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4

Proposition 1 : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [-3 ; 1].

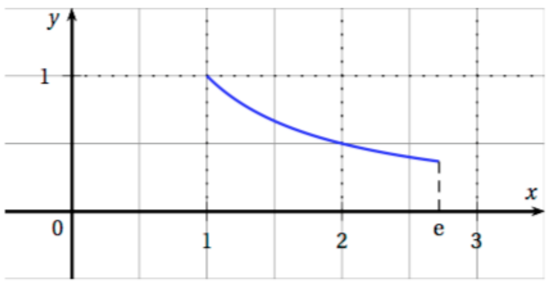
2. On considère une fonction *g* définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 13] et on donne ci-dessous la courbe représentative de sa fonction dérivée *g '* sur l'intervalle [0 ; 13].



Proposition 2 : La fonction *g* est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 4].

Proposition 3 : La fonction *g* est concave sur l'intervalle [0 ; 13].

3. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction h définie sur [1 ; e] par $h(x) = \frac{1}{x}$.



Proposition 4 : La fonction h est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle [1 ; e].

4. Tous les jours, Jordan joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.
La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [20 ; 120].

Proposition 5 : La probabilité que les quatre joueurs soient réunis en moins de 60 secondes vaut 0,6.

Exercice 2 : (5 points)

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel C est un nombre réel

Traitement :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à C la valeur 300
	Tant que $C < 400$ faire
	    C prend la valeur $C - C \times 0{,}08 + 50$
	    n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher n

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$		Vrai		…
Valeur de C	300	326		…
Valeur de n	0	1		…

b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

a) Exprimer pour tout entier naturel n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.

b) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = 625 - C_n$. Montrer que pour tout entier naturel n on a $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 625 - 325 \times 0{,}92^n$.

d) Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

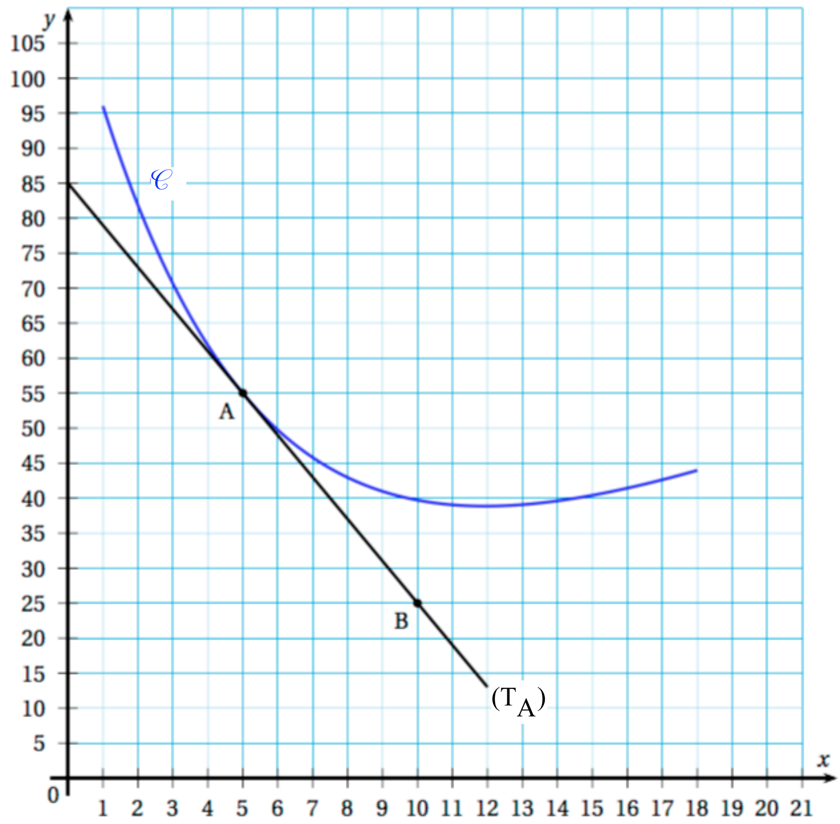
3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

a) Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question? Quelle serait la valeur de n affichée ?

b) Retrouve la réponse à ce problème en résolvant une inéquation.

Exercice 3 : (5 points)

Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1 et 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [1 ; 18]. On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la tangente (T_A) au point A (5 ; 55). Le point B (10; 25) appartient à la tangente (T_A).



On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle [1 ; 18], on a : $f(x) = 2x + 5 + 40e^{-0,2x+1}$.

1. a) Déterminer graphiquement la valeur de $f'(5)$ en expliquant la démarche utilisée.

   b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [1 ; 18].

   c) Vérifier par le calcul la réponse à la question 1. a)

2. a) Montrer que $2 - 8e^{-0,2x+1} \geq 0$ est équivalente à $x \geq 5 + 5ln(4)$.

   b) En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur [1 ; 18].

3. Déterminer le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal. Calcule ce coût, au centime d'euro près ?

4. a) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + 5x - 200e^{-0,2x+1}$ est une primitive de f sur l'intervalle [1 ; 18].

   b) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   c) Calculer $\frac{1}{10}I$, au centième près, puis interpréter dans le contexte de l'exercice le résultat obtenu.

Exercice 4 : (5 points)

Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

- premier temps : étude du dossier présenté par le candidat
- deuxième temps : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en œuvre par l'entreprise est le suivant :

- si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines.
- si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas.

À l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

- 30 % des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité.
- 20 % des candidats n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés.
- 38 % des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :
   - D l'évènement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité »
   - R l'évènement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

   a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré

   b) Calculer la probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l'entreprise.

   c) Montrer que la probabilité de l'évènement $D \cap R$ est égale à 0,24.

   d) En déduire la probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité. Compléter l'arbre pondéré réalisé dans la question a).

2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,38$.

   b) Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.

3. Deux amis, Aymeric et Coralie, sont convoqués le même jour pour un entretien avec la direction des ressources humaines. Coralie arrive à 8 h 30 min alors qu'Aymeric arrive au hasard entre 8 h et 9 h.
   On désigne par T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'Aymeric et on admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle [8 ; 9].
   Déterminer la probabilité pour que Coralie attende Aymeric plus de dix minutes.

Série ES **18 mai 2016**
Durée de l'épreuve : 3 h

Bac Blanc de Mathématiques

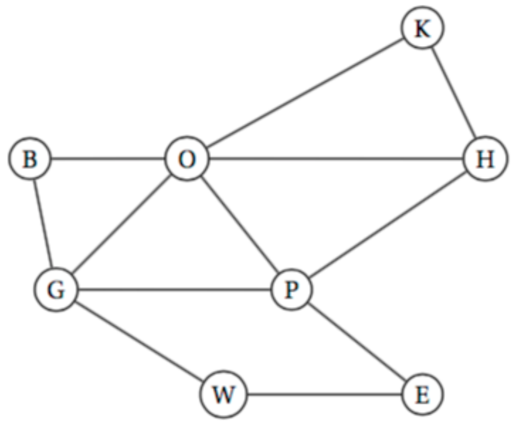
- Enseignement de spécialité -

Coefficient 7

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (5 points)

On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations. Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. a) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.

   b) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.

2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne.
   Si oui, donner une telle chaîne.

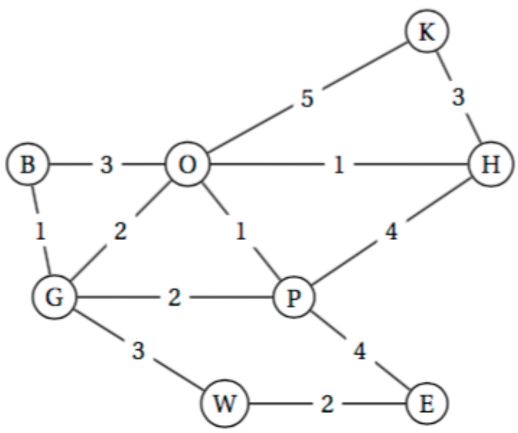
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

   Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.

   a) Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles, en justifiant la réponse.

   b) Donner les trajets possibles.



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station.

5. À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.

Correction du bac blanc de mai 2016

Exercice 1 : (Elèves qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité en mathématiques)

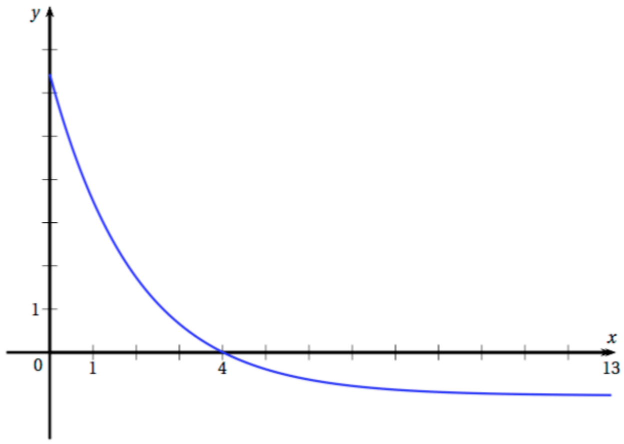
1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 1].

x	-3		-1		0		1
f	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4

Proposition 1 : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [-3 ; 1]. **VRAI**

Justification :
La fonction f est continue, strictement croissante et change de signe sur [0 ; 1] car $f(0) = -2$ et $f(1) = 4$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur [0 ; 1]. Comme f est strictement négative sur [-3 ; 0], l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur [-3 ; 1]

2. On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 13] et on donne ci-dessous la courbe représentative de sa fonction dérivée g' sur l'intervalle [0 ; 13].



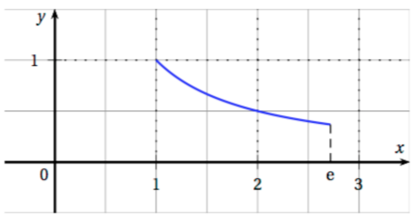
Proposition 2 : La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 4]. **FAUX**

Justification : Graphiquement, la fonction g' est positive sur [0 ; 4] donc g est croissante sur [0 ; 4].

Proposition 3 : La fonction g est concave sur l'intervalle [0 ; 13]. **VRAI**

Justification : Graphiquement, la fonction g' est décroissante sur [0 ; 13] donc g est concave sur [0 ; 13].

3. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction h définie sur [1 ; e] par $h(x) = \frac{1}{x}$.



Proposition 4 : La fonction h est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle [1 ; e]. **VRAI**

Justification : h est définie, continue et positive sur [1 ; e].
De plus, puisque la fonction ln est une primitive de la fonction inverse :
$\int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x = ln(e) - ln(1) = 1 - 0 = 1$.
Donc h est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle [1 ; e]

4. Tous les jours, Jordan joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.
La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [20 ; 120].

Proposition 5 : La probabilité que les quatre joueurs soient réunis en moins de 60 s vaut 0,6. **FAUX**

Justification : D suit une loi uniforme sur l'intervalle [20 ; 120].
Donc : P $(20 \leq D \leq 60) = \frac{60-20}{120-20} = \frac{40}{100} = 0{,}4$

Exercice 2 :

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel C est un nombre réel

Traitement :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à C la valeur 300
	Tant que C < 400 faire
	    C prend la valeur $C - C$ × 0,08 + 50
	    n prend la valeur n + 1
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher n

a) Les résultats sont arrondis à l'entier le plus proche.

Test C < 400		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411
Valeur de n	0	1	2	3	4	5

b) La valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme est $n = 5$.
Cela signifie qu'il faudra 5 ans pour que le nombre de colonies d'abeilles dépasse 400.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année 2014 + n. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

a) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = C_n - 0{,}08\ C_n + 50 = (1 - 0{,}08)\ C_n + 50 = 0{,}92\ C_n + 50$

b) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $V_n = 625 - C_n$.
D'une part : $V_{n+1} = 625 - C_{n+1} = 625 - (0{,}92\ C_n + 50) = -0{,}92\ C_n + 625 - 50 = -0{,}92\ C_n + 575$
D'autre part : $0,92 \times V_n = 0{,}92\ (625 - C_n) = 575 - 0{,}92\ C_n$
Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.

c) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.
On en déduit que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,92.
Son 1^er^ terme est : $V_0 = 625 - C_0 = 625 - 300 = 325$.
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times 0{,}92^n = 325 \times 0{,}92^n$
Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $V_n = 625 - C_n$ Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $C_n = 625 - V_n = 625 - 325 \times 0{,}92^n$.

d) $C_{10} = 625 - 325 \times 0{,}92^{10} \approx 484$
Ainsi, en 2024, l'apiculteur peut espérer posséder 484 colonies d'abeilles.

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

a) Au départ l'apiculteur avait 300 colonies. Il veut doubler ce nombre et passer à 600.
Pour savoir combien d'années sont nécessaires pour atteindre son objectif il faudrait modifier la ligne « Tant que C < 400 faire » par « Tant que C < 600 faire ». On obtiendrait alors $n = 31$.

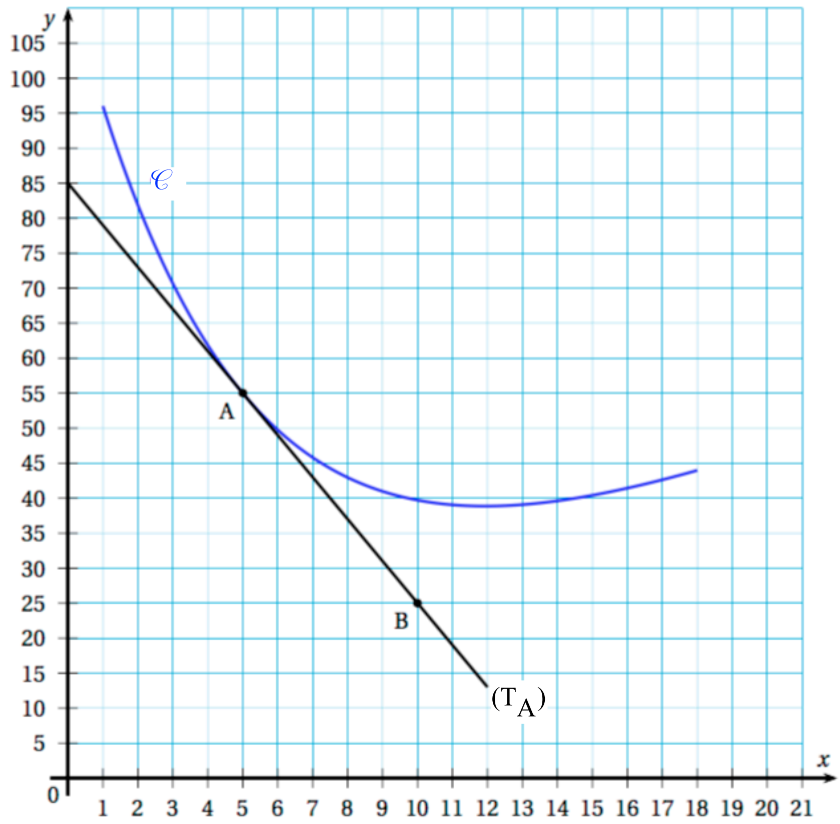
b) On retrouve la réponse à ce problème en résolvant : $C_n \geq 600$

$625 - 325 \times 0{,}92^n \geq 600$
$-325 \times 0{,}92^n \geq 600 - 625$
$-325 \times 0{,}92^n \geq -25$
$0{,}92^n \leq \frac{-25}{-325}$
$ln(0,92^n) \leq ln(\frac{1}{13})$

$n\ ln(0,92) \leq -\ ln(13)$
Or : $0 < 0{,}92 < 1$ Donc : $ln(0,92) < 0$
On en déduit : $n \geq -\ \frac{ln(13)}{ln(0,92)} \approx 30{,}76$
Or : $n \in \mathbb{N}$ Donc : $n \geq 31$.
Il faudra donc 31 ans à l'apiculteur avant qu'il puisse doubler son nombre initial de colonies.

Exercice 3 :

Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1 et 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [1 ; 18]. On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la tangente (T_A) au point A (5 ; 55). Le point B (10; 25) appartient à la tangente (T_A).



On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle [1 ; 18], on a : $f(x) = 2x + 5 + 40e^{-0,2x+1}$.

1. a) $f'(5)$ correspond au coefficient directeur de la tangente (T_A) au point A d'abscisse 5.
   $f'(5) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{55-25}{5-10} = \dfrac{30}{-5} = -6$

   b) $\forall\, x \in [1 ; 18]$, $f(x) = 2x + 5 + 40e^{-0,2x+1} = 2x + 5 + 40e^{u(x)}$
   Donc : $f'(x) = 2 + 40u'(x)e^{u(x)}$ avec : $u(x) = -0,2x + 1$ et : $u'(x) = -0,2$
   $f'(x) = 2 + 40 \times (-0,2)e^{-0,2x+1} = 2 - 8e^{-0,2x+1}$

   c) $f'(5) = 2 - 8e^{-0,2x+1} = 2 - 8e^{-0,2\times5+1} = 2 - 8e^{-1+1} = 2 - 8e^{0} = 2 - 8 = -6$

2. a) Montrer que $2 - 8e^{-0,2x+1} \geq 0$ est équivalente à $x \geq 5 + 5ln(4)$.

   $2 - 8e^{-0,2x+1} \geq 0$
   $-8e^{-0,2x+1} \geq -2$
   $e^{-0,2x+1} \leq \dfrac{-2}{-8}$

   $-0,2x + 1 \leq ln(\frac{1}{4})$
   $-0,2x + 1 \leq -ln(4)$
   $5(-0,2x + 1) \leq -5ln(4)$

   $-x + 5 \leq -5ln(4)$
   $-x \leq -5 - 5ln(4)$
   $x \geq 5 + 5ln(4)$

   b) $\forall\, x \in [1 ; 18]$, $f'(x) = 2 - 8e^{-0,2x+1}$
   Or : $2 - 8e^{-0,2x+1} \geq 0 \iff x \geq 5 + 5ln(4)$.
   On en déduit que $f'(x)$ est positif sur $[5 + 5ln(4) ; 18]$ et négatif sur $[1 ; 5 + 5ln(4)]$.

   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		$5 + 5ln(4)$		18
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

3. $5 + 5ln(4) \approx 12$
$f(12) = 2 \times 12 + 5 + 40e^{-0,2\times 12+1} = 29 + 40e^{-1,4} \approx 38{,}86$
Le coût de fabrication unitaire minimal est 38,86 €. Il est atteint lorsque l'entreprise produit 12 parasols.

4. a) $\forall\ x \in [1 ; 18]$, $F(x) = x^2 + 5x - 200e^{-0,2x+1} = x^2 + 5x - 200e^{u(x)}$
Donc : $F'(x) = 2x + 5 - 200u'(x)e^{u(x)}$ avec : $u(x) = -0,2x + 1$ et : $u'(x) = -0,2$
$F'(x) = 2x + 5 - 200 \times (-0{,}2)e^{-0,2x+1} = 2x + 5 + 40e^{-0,2x+1} = f(x)$
Donc F est une primitive de f sur l'intervalle [1 ; 18].

b) $I = \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = F(15) - F(5)$
$F(15) = 15^2 + 5 \times 15 - 200e^{-0,2\times 15+1} = 300 - 200e^{-2}$
$F(5) = 5^2 + 5 \times 5 - 200e^{-0,2\times 5+1} = 50 - 200e^{0} = 50 - 200 = -150$
Donc : $I = \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = 300 - 200e^{-2} + 150 = 450 - 200e^{-2}$

c) $\frac{1}{10}I = \frac{1}{15-5}\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\,(450 - 200e^{-2}) \approx 42{,}29$
$\frac{1}{10}I$ est le coût de fabrication unitaire moyen lorsque l'entreprise produit entre 5 et 15 parasols.
Ce coût de fabrication unitaire moyen est d'environ 42,29 € par parasol.

Exercice 4 :

Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :
- premier temps : étude du dossier présenté par le candidat
- deuxième temps : entretien en vue du recrutement.

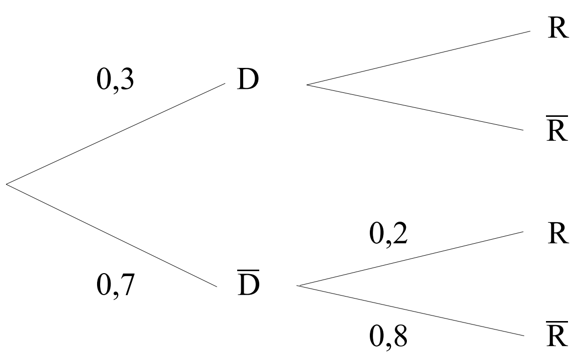
Le processus de recrutement mis en œuvre par l'entreprise est le suivant :
- si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines.
- si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas.

À l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :
- 30 % des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité.
- 20 % des candidats n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés.
- 38 % des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :
   - D l'évènement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité »
   - R l'évènement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

a)

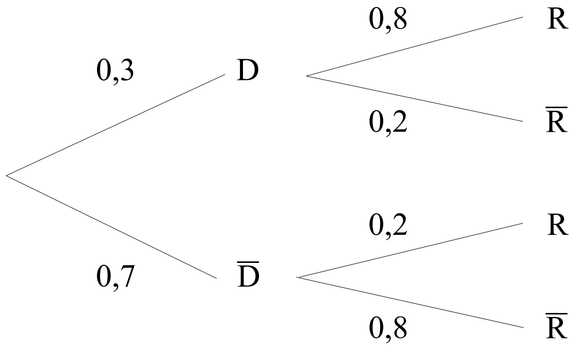


b) $\text{P}(\overline{\text{D}} \cap \overline{\text{R}}) = \text{P}(\overline{\text{D}}) \times \text{P}_{\overline{\text{D}}}(\overline{\text{R}}) = (1 - \text{P}(\text{D}) \times (1 - \text{P}_{\overline{\text{D}}}(\text{R})) = (1 - 0,3) \times (1 - 0,2) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$
La probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté est 0,56.

c) On a : $\text{P}(\text{R}) = \text{P}(\text{D} \cap \text{R}) + \text{P}(\overline{\text{D}} \cap \text{R})$ Or, d'après l'énoncé : P(R) = 0,38
Donc : $0{,}38 = \text{P}(\text{D} \cap \text{R}) + 0{,}7 \times 0{,}2$
$0{,}38 = \text{P}(\text{D} \cap \text{R}) + 0{,}14$
$\text{P}(\text{D} \cap \text{R}) = 0{,}38 - 0{,}14 = 0{,}24$

d) $P_D(R) = \frac{P(D \cap R)}{P(D)} = \frac{0{,}24}{0{,}3} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

La probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité est 0,8.
On complète l'arbre pondéré.



2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

a) Postuler à un emploi est une épreuve de Bernoulli car les deux seules issues possibles sont R et $\overline{R}$.
On rappelle : $P(R) = 0{,}38$. Cette épreuve est répétée 10 fois dans des conditions d'indépendance.
On obtient un schéma de Bernoulli.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.
X prend les valeurs entières de 0 à 10. Donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;0{,}38)$.

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}38^0 \; (1 - 0{,}38)^{10} = 1 - 0{,}62^{10} \approx 0{,}992$.

La probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée est d'environ 0,992.

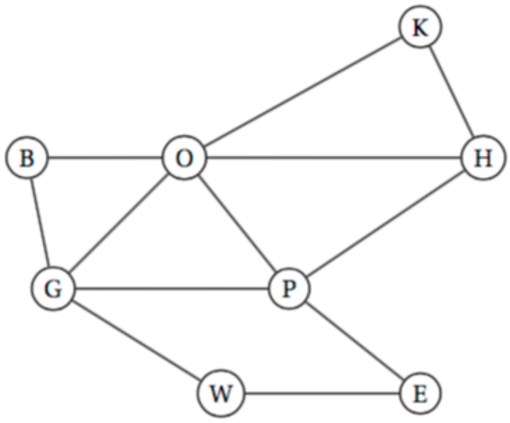
3. Deux amis, Aymeric et Coralie, sont convoqués le même jour pour un entretien avec la direction des ressources humaines. Coralie arrive à 8 h 30 min alors qu'Aymeric arrive au hasard entre 8 h et 9 h. On désigne par T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'Aymeric et on admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle [8 ; 9].

Coralie attendra Aymeric plus de dix minutes s'il arrive entre 8 h 40 min et 9 h.
Avant de calculer la probabilité associée il faut convertir 8 h 40 min en heures.
8 h 40 min = 8 h + $\frac{40}{60}$ h = 8 h + $\frac{2}{3}$ h = $\frac{24}{3}$ h + $\frac{2}{3}$ h = $\frac{26}{3}$h

X suit la loi uniforme sur l'intervalle [8 ; 9] donc $P(\frac{26}{3} < X \leq 9) = \frac{9-\frac{26}{3}}{9-8} = 9 - \frac{26}{3} = \frac{27}{3} - \frac{26}{3} = \frac{1}{3}$

Ainsi, la probabilité que Coralie attende Aymeric plus de dix-minutes est $\frac{1}{3}$.

Exercice 1 : (Elèves qui ont suivi l'enseignement de spécialité en mathématiques)
On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations. Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. a) Le graphe Γ est connexe car la chaîne B – O – K – H – P – E – W – G permet de relier ses 8 sommets.

   b) Le graphe Γ n'est pas complet car les sommets B et K (par exemple) ne sont pas adjacents.

2. D'après le théorème d'Euler, le graphe Γ admet une chaîne eulérienne car on compte exactement deux sommets de degrés impairs. O est de degré 5 et H est de degré 3.
   La chaîne O – B – G – W – E – P – G – O – P – H – O – K – H est une chaîne eulérienne.

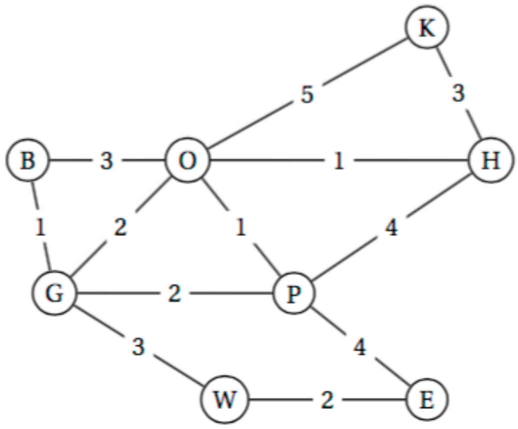
3. On note M la matrice d'adjacence du graphe Γ (les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique).

$$M = \begin{array}{c} \\ B \\ E \\ G \\ H \\ K \\ O \\ P \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} B & E & G & H & K & O & P & W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
M^3 = \begin{array}{c} \\ B \\ E \\ G \\ H \\ K \\ O \\ P \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} B & E & G & H & K & O & P & W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.

   a) Il y a 4 trajets possibles pour se rendre de Holborn à Green Park en utilisant 3 lignes de métro.
   Le nombre de trajets possibles se lit dans M^3 à l'intersection de la 4$^{\text{ème}}$ ligne et de la 3$^{\text{ème}}$ colonne.

   b) Les 4 trajets possibles sont :
   H – O – B – G   H – K – O – G   H – P – O – G   H – O – P – G



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station.

5. À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.

	W	B	E	G	H	O	P	K	« Meilleur sommet »
Initialisation	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	W
Etape 1	/	∞	2 W	3 W	∞	∞	∞	∞	E
Etape 2	/	∞	/	3 W	∞	∞	6 E	∞	G
Etape 3	/	4 G	/	/	∞	5 G	~~6 E~~ 5 G	∞	B
Etape 4	/	/	/	/	∞	5 G ~~7 B~~	5 G	∞	O
Etape 5	/	/	/	/	6 O	/	5 G ~~6 O~~	10 O	P
Etape 6	/	/	/	/	6 O ~~9 P~~	/	/	10 O	H
Etape 7	/	/	/	/	/	/	/	~~10 O~~ 9 H	K

En appliquant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour relier Westminster à King's Cross est :

W – G – O – H – K

Ce trajet dure 9 min.

Remarque : On peut inverser les choix de O et P comme « meilleurs sommets » aux étapes 4 et 5. Cela ne change rien.