Série S Durée de l'épreuve : 4 h	10/05/17

Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement spécifique -

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **:** **(4 points)**

On considère la fonction f dérivable et définie sur $[0;+\infty[$ par :

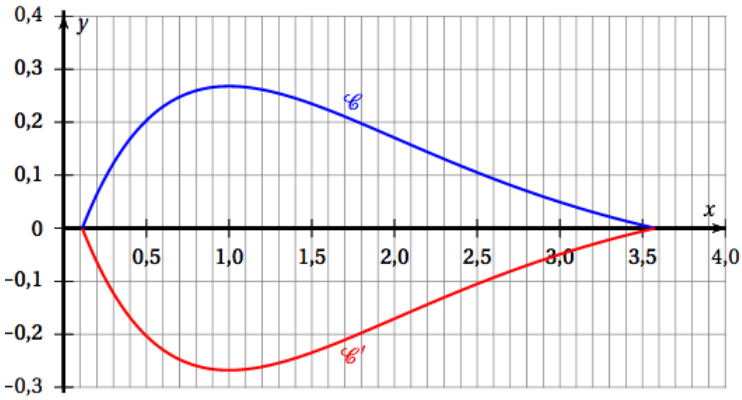
$$f(x) = x\,e^{-x} - 0,1$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $[0;1]$.

On admet l'existence d'un nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses. **L'unité sur chaque axe représente 5 m**.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$ par :

   $$F(x) = -(x+1)\,e^{-x} - 0,1x$$

   est une primitive de la fonction f sur $[\alpha;\beta]$.
5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0{,}112$ et $\beta \approx 3{,}577$.
6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaires à la réalisation de ce massif.

Exercice 2 **:** **(5 points)**

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation suivante, d'inconnue complexe z :
$$z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$$
où a désigne un nombre réel quelconque.

   a) Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.

   b) Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.

   c) Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.

   d) Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0;\pi[$ et z le nombre complexe tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.
Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0;\pi[$:

   a) Le nombre z est un réel positif.

   b) Le nombre z est égal à 1.

   c) Un argument de z est θ.

   d) Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$.

3. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}sin(x)$

   a) f est décroissante sur $]\frac{\pi}{4};+\infty[$.

   b) $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$.

   c) f est positive sur $]0;+\infty[$.

   d) La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{-x}(cos(x) - sin(x))$ est une primitive de f.

4. On considère la fonction f dérivable et définie sur l'intervalle $]0 , +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+ln\,x}{x^2}$.

   a) L'équation $f(x) = x + 1$ admet une solution sur l'intervalle $]0 , +\infty[$.

   b) La courbe représentative de la fonction f admet un point d'intersection avec l'axe des abscisses.
   C'est le point d'abscisse $-e$.

   c) $f'(x) = \frac{-2\,ln(x)-1}{x^2}$

   d) Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}f$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$. La suite (I_n) est croissante sur N*.

5. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots d'une nouvelle crème hydratante. On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots conformes dans l'échantillon est 0,94. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus. La probabilité p que la boutique reçoive au maximum deux pots non conformes est :

   a) $p \approx 0{,}226$

   b) $p \approx 0{,}416$

   c) $p \approx 0{,}190$

   d) $p \approx 0{,}810$

Exercice 3 **: Vote de paille** **(4 points)**

Partie A :

En 1936, afin de prédire le résultat de l'élection présidentielle, le magazine américain *Literary Digest* organisa un « vote de paille » en envoyant par la poste environ dix millions de « bulletins de vote ». L'échantillon de ce sondage reposait sur différentes sources : listes des abonnés à la revue, annuaire téléphonique, immatriculations automobiles. Des dix millions de bulletins envoyés, le magazine reçut environ 2,4 millions de réponses de personnes souhaitant participer au sondage. Seulement 41 % des répondants indiquèrent qu'ils voteraient pour le président sortant, Franklin Roosevelt.
Le magazine annonça donc la chute du président en place. Mais celui-ci fut réélu avec 61 % des suffrages !

On considère au hasard une personne parmi les dix millions de destinataires des bulletins de vote. On note :

- S l'évènement « la personne participe au sondage »
- R l'évènement « la personne vote pour Roosevelt ».

On suppose que $P(R) = 0{,}61$.

1. Déduire de l'énoncé $P(S)$ et $P_S(R)$.
2. Calculer $P(R \cap S)$.
3. En déduire que $P(\bar{S} \cap R) = 0{,}5116$.
4. Calculer $P_{\bar{S}}(R)$ à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat et le comparer avec $P_S(R)$.
5. Calculer $P_R(S)$ et $P_{\bar{R}}(S)$ à 10^{-3} près. Comparer et interpréter ces deux résultats.

Point info : Malgré la taille gigantesque de l'échantillon utilisé par le magazine *Literary Digest*, celui-ci présentait plusieurs biais et prédit le mauvais résultat. Dans le même temps, l'institut Gallup réalisa un sondage sur un échantillon « représentatif » de 5 000 personnes et prédit la victoire de Roosevelt. Ce fût le début de l'utilisation de méthodes scientifiques pour les sondages.

Partie B :

Le 24 juin 2016, les Britanniques participaient à un referendum à deux issues :

- Le « In » pour les favorables au maintient du Royaume-Uni dans l'Union Européenne.
- Le « Out » pour les favorables à la sortie du Royaume-Uni dans l'Union Européenne.

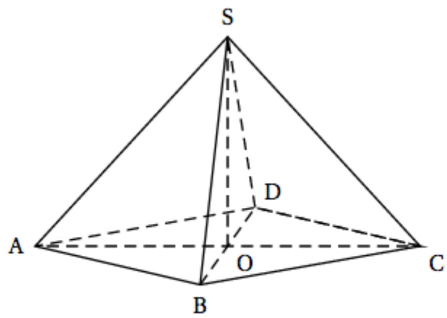
Ce jour là, le camp du « Leave » favorable à la sortie du Royaume-Uni de l'UE, remportait le referendum avec 51,9 % des voix contre 48,1 % pour le « Remain », pro-européen.

Une étude d'opinion réalisée par *Ipsos Mori* auprès de 1 592 britanniques et publiée 2 jours plus tôt, le 22 juin 2016, dans le quotidien *Evening Standard* prédisait la victoire du « In » avec 52 % contre 48 % pour le Brexit.

Le résultat du referendum était-il envisageable le 22 juin, au niveau de confiance 95 % ? Justifier.

Exercice 4 **:** **(4 points)**

Partie A : Un calcul de volume sans repère.



On considère la pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.

Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm.
On note O le centre du carré ABCD. On admettra que OS = OA.

1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).
2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Partie B : Dans un repère.

On considère le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS})$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].

   a) Justifier que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQC).

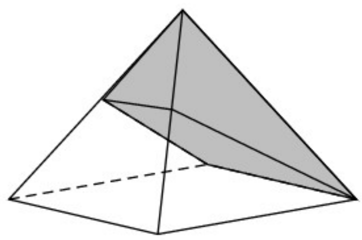
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).
2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

   a) Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).

   b) Calculer les coordonnées du point H.

   c) Montrer alors que la longueur SH est égale, en unités de longueur, à $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.
3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD est égale, en unités d'aires, à $\frac{3\sqrt{11}}{8}$.
   Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unités de volume.

Partie C : Partage équitable.



Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ». Fanny à des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables. Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

Exercice 5 **:** **(3 points)**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$$

1. Calculer les valeurs exactes des quatre premiers termes de la suite.
2. Conjecturer la limite de la suite puis démontrer ce résultat.
   Toute prise d'initiative sera valorisée.
3. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre, qui permet de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}.$$

Variables :	n est un entier a et b sont des réels
Initialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 0 b prend la valeur 0,5
Traitement :	Tant que $\mid b - a \mid$ … n prend la valeur … a prend la valeur … b prend la valeur … Fin Tant que
Sortie :	Afficher …

Correction bac blanc n°3, 10 Mai 2017

Exercice 1 **:** **(4 points)**

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,e^{-x} - 0,1$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$f(x) = xe^{-x} - 0{,}1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x} - 0{,}1$ or = $+\infty$ d $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$ = 0 d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} - 0{,}1$ $_{\to+\infty} f(x) = -0{,}1$

2. Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

f est définie et dérivable sur [0,+∞[donc $f'(x) = 1xe^{-x} + x(-e^{-x}) - 0 = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$
Pour tout $x\in[0;+\infty[$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe $1-x$.
$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc

x	0		1		+∞
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f'	-0,1	↗	e^{-1} - 0,1	↘	-0,1

← *Signe de a=-1 <0 à « droite du zéro »*

e^{-1} - 0,1≈ 0,27 > 0

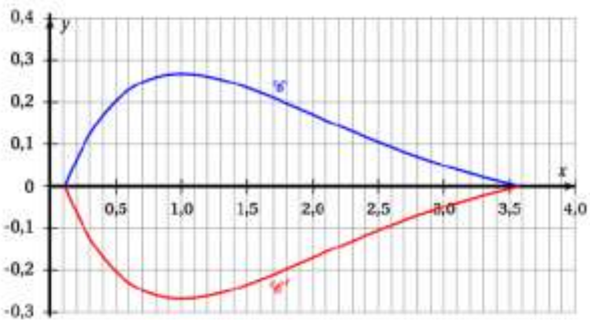
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $[0;1]$.

Sur l'intervalle [0 ;1]

- $0 \in [-0{,}1 ; e^{-1} - 0{,}1]$
- f est strictement croissante
- f est continue

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation f(x) =0 admet une solution unique $\alpha \in [0;1]$

On admet l'existence d'un nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses. **L'unité sur chaque axe représente 5 m**.
Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$ par :

$$F(x) = -(x+1)\,e^{-x} - 0,1x$$

est une primitive de la fonction f sur [α ; β]
$F(x) = (-x-1)e^{-x} - 0{,}1x$
Donc $F'(x) = -1e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x}) - 0{,}1$
$F'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - 0{,}1$
$F'(x) = xe^{-x} - 0{,}1 = f(x)$ donc F est une primitive de la fonction f sur [α ; β].

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0{,}112$ et $\beta \approx 3{,}577$.

D'après le tableau des variations, sur l'intervalle [α ; β], la fonction f est positive. Donc l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$ est égale à : $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ u.a.
De plus les courbes C et C' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc l'aire S du massif est égale à

S =2x$\int_\alpha^\beta f(x)dx$ u.a. d' après le 4. S=2x$[F(x)]_\alpha^\beta$ = 2x(F(β) – F(α))≈ = 2x(F(3,577) – F(0,112))u.a.
Or 1u.a.=5x5=25m² donc S =2x(F(3,577) – F(0,112))x25m², S =50x(F(3,577) – F(0,112)) m²
S≈25,98m²

Ou bien :On calcule l'aire entre C et C' , sur l'intervalle [α ; β],avec C au dessus de C' donc $S = \int_\alpha^\beta f(x) - (-f(x))dx$

6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaires à la réalisation de ce massif.

25,98x36 =935,28 donc 935 plants de tulipes seront nécessaires pour la réalisation du massif.

Exercice 2 : **(5 points)**

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation suivante, d'inconnue complexe z :

$$z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$$

où a désigne un nombre réel quelconque.

a est un réel d'où $2a$ est un réel donc $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$ est une équation du second degré à coefficients réels. $\Delta = b^2 - 4ac = (2a)^2 - 4\times1\times(a^2+1) = 4a^2 - 4a^2 - 4 = -4 < 0$

$\Delta<0$ l'équation admet 2 solutions complexes conjuguées z_1 et $z_2 = \overline{z_1}$ de plus $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1|$ donc

Réponse c] exacte

2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0;\pi[$ et z le nombre complexe tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.
Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0;\pi[$:

Raisonnons à l'aide d'un contrexemple : soit $\theta = \frac{\pi}{2}$ $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}}$ or $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ donc $z = 1+i$

Donc z n'est pas un réel, z est différent de 1, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \neq \theta = \frac{\pi}{2}$, par contre $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} = \frac{\theta}{2}$

On peut donc affirmer que pour tout réel θ dans l'intervalle]0 ;π[les réponses a) b) et c) sont fausses donc

Réponse *d*) exacte

3. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}\sin(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.

On reconnait la fonction F donnée dans la proposition d) donc F n'est pas une primitive de f.

De plus $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $f'(\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{4}}\times 0 = 0$ donc

Réponse *b*) exacte

4. *On considère la fonction f dérivable et définie sur l'intervalle]0 ;+∞[par* $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$

a) L'équation $f(x) = x+1$ admet une solution sur]0 ;+∞[

On peut par lecture graphique constater que la droite d'équation $y = x+1$ est au dessus de C_f.Certaines fenêtres de la calculatrice induisent en erreur et laissent à penser que l'équation admet une solution unique.Donc c'est faux.

b) La courbe représentative de la fonction f admet un point d'intersection avec l'axe des abscisses. C'est le point d'abscisse –e.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \neq -e$ donc c'est faux

On peut également remarquer que -e n'appartient pas à l'ensemble de définition

c) $f'(x) = \frac{-2\ln(x)-1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-2\ln(x)-1}{x^3}$, le dénominateur n'est pas le même donc c'est faux.

d) Pour tout entier n≥1, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x=n$.La suite (I_n) est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n+1} f(x)dx - \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n+1} f(x)dx + \int_{n}^{\frac{1}{e}} f(x)dx = \int_{n}^{\frac{1}{e}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{e}}^{n+1} f(x)dx = \int_{n}^{n+1} f(x)dx$

$f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$ sur [n ;n+1] $x \geq 1$ donc $\ln x \geq 0$, 1>0 et $x^2>0$ donc $f(x) \geq 0$ de plus $n < n+1$ donc $\int_{n}^{n+1} f(x)dx \geq 0$

Donc (In) est croissante.

Réponse *d*) exacte

5. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots d'une nouvelle crème hydratante. On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots conformes dans l'échantillon est 0,94. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus. La probabilité p que la boutique reçoive au maximum deux pots non conformes est :

X est une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(50\,;0{,}06)$

$p = p(X \leq 2) = p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$

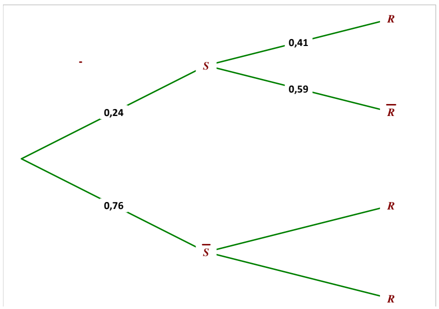
$= \binom{50}{0}0{,}06^0\times0{,}94^{50} + \binom{50}{1}0{,}06^1\times0{,}94^{50} + \binom{50}{2}0{,}06^2\times0{,}94^{48} \approx 0{,}416$

Réponse *b*) exacte

Exercice 3 : Vote de paille (4 points)

Partie A :

En 1936, afin de prédire le résultat de l'élection présidentielle, le magazine américain *Literary Digest* organisa un « vote de paille » en envoyant par la poste environ dix millions de « bulletins de vote ». L'échantillon de ce sondage reposait sur différentes sources : listes des abonnés à la revue, annuaire téléphonique, immatriculations automobiles. Des dix millions de bulletins envoyés, le magazine reçut environ 2,4 millions de réponses. Seulement 41 % des répondants indiquèrent qu'ils voteraient pour le président sortant, Franklin Roosevelt. Le magazine annonça donc la chute du président en place. Mais celui-ci fut réélu avec 61 % des suffrages !
On considère au hasard une personne parmi les dix millions de destinataires des bulletins de vote.
On note S l'évènement « la personne participe au sondage » et R l'évènement « la personne vote pour Roosevelt ». On suppose que $P(R) = 0,61$.



1. Déduire de l'énoncé $P(S)$ et $P_S(R)$.

$P(S)=\frac{2,4\text{x}10^6}{10\text{x}10^6}=0,24$ $\quad$ $P_S(R)=41\%=0,41$

2. Calculer $P(R\cap S)$.

$P(R\cap S)=p(S)\text{x}P_S(R)=0,24\text{x}0,41=0,0984$

3. En déduire que $P(\overline{S}\cap R) = 0,5116$.

$P(R)= P(R\cap S)+ P(R\cap\overline{S}) \Leftrightarrow P(R\cap\overline{S})=P(R)- P(R\cap S)$
$P(R\cap\overline{S})=0,61-0,0984=0,5116$

4. Calculer $P_{\overline{S}}(R)$ à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat et le comparer

$P_{\overline{S}}(R)=\frac{P(R\cap\overline{S})}{P(\overline{S})}=\frac{0,51}{1-0,24}=\frac{0,5116}{0,76}\approx 0,673$

$P_{\overline{S}}(R)$ corespond à la probabilité que la personne vote pour Roosevelt sachant qu'elle n'a pas participé au sondage.
$P_S(R)$ corespond à la probabilité que la personne vote pour Roosevelt sachantqu'elle a participé au sondage.
La probabilité que la personne vote pour Roosevelt sachant qu'elle n'a pas participé au sondage est plus proche des résultats obtenus.
L'échantillon de personnes ayant répondu au sondage n'était pas suffisamment représentatif de la population des Etats-Unis.

5. Calculer $P_R(S)$ et $P_{\overline{R}}(S)$ à 10^{-3} près. Comparer et interpréter ces deux résultats.

$P_R(S)=\frac{P(S\cap R)}{P(R)}=\frac{0,0984}{0,61}\approx 0,161$ $\quad$ $P_{\overline{R}}(S)=\frac{P(S\cap\overline{R})}{P(\overline{R})}=\frac{p(S)\text{x}P_S(\overline{R})}{1-P(R)}=\frac{0,24\text{x}(1-0,41)}{0,39}=0,363$

La probabilité qu'une personne a participé au sondage sachant qu'elle a voté pour Roosevelt est faible
Cela peut expliquer que la probabilité qu'une personne vote pour Roosevelt soit inférieure à la réalité.
De même : La probabilité qu'une personne participe au sondage sachant qu'elle n'a voté pas pour Roosvelt est plus élevé .Cela contribue à la situation.

Partie B :

Le 24 juin 2016, les Britanniques participaient à un referendum à deux issues :

- Le « In » pour les favorables au maintient du Royaume-Uni dans l'Union Européenne.
- Le « Out » pour les favorables à la sortie du Royaume-Uni dans l'Union Européenne.

Ce jour là, le camp du « Leave » favorable à la sortie du Royaume-Uni de l'UE, remportait le referendum avec 51,9 % des voix contre 48,1 % pour le « Remain », pro-européen.

Une étude d'opinion réalisée par *Ipsos Mori* auprès de 1 592 britanniques et publiée 2 jours plus tôt, le 22 juin 2016, dans le quotidien *Evening Standard* prédisait la victoire du « In » avec 52 % contre 48 % pour le Brexit.

Le résultat du referendum était-il envisageable le 22 juin, au niveau de confiance 95 % ? Justifier.

Taille de l'échantillon : $n = 1592$ .Déterminons un intervalle de confiance pour chaque issue :

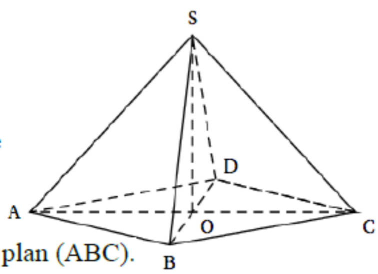
Pour le « In » : $I_1 =[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}]$
$I_1 =[0,52-\frac{1}{\sqrt{1592}} ; 0,52+\frac{1}{\sqrt{1592}}]$
$I_1 =[0,49 ; 0,55]$
Valeur approchée par défaut $\quad$ Valeur approchée par excés

Pour le « out » : $I_2 =[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}]$
$I_2 =[0,48-\frac{1}{\sqrt{1592}} ; 0,48+\frac{1}{\sqrt{1592}}]$
$I_2 =[0,45 ; 0,51]$
Valeur approchée par défaut $\quad$ Valeur approchée par excés

A partir des sondages on pouvait dire que le pourcentage du « In » appartenait à l'intervalle I_1 au seuil de risque de 5% et que le pourcentage du « out » appartenait à l'intervalle I_2 au seuil de risque de 5% .La victoire du « out » était envisageable puisque il était possible d'obtenir un pourcentage strictement supérieur à 0,5 (majorité absolue) dans l'intervalle $[0,45 ; 0,51]= I_2$.
Par contre les pourcentages obtenus n'appartiennent pas aux intervalles de confiance,et font partie des 5% de risque.

Exercice 4 : (4 points)

Partie A : Un calcul de volume sans repère.



On considère la pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre. Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm.
On note O le centre du carré ABCD. On admettra que OS = OA.

1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

Démontrons que (SO) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) :
Toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux donc SA=SB=SC=SD donc les triangles ASC et BSD sont isocèles en S.De plus O est le centre du carré donc O est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dans le triangle ASC isocèle en S la médiane (SO) est aussi hauteur donc } (SO)\perp(AC) \\ \text{Dans le triangle BSD isocèle en S la médiane (SO) est aussi hauteur donc } (SO)\perp(BD)\end{array}\right\}$$

Donc la droite (SO) est orthogonale à deux droites sécantes en O.
On en déduit que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}$xaire de la basexhauteur $= \frac{1}{3}$xaire$_{ABCD}$ xSO

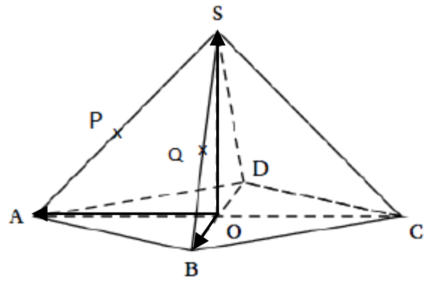
$$\left.\begin{array}{l}\text{aire}_{ABCD} = \frac{ACxBD}{2} = \frac{24^2}{2} = 288cm^2 \\ SO = OA = \frac{AC}{2} = 12cm\end{array}\right\} \quad \mathcal{V} = \frac{1}{3}\text{x}288\text{x}12 = 1152cm^3$$

Rappel :un carré est un losange particulier, on peut donc utiliser la formule de l'aire d'un losange en fonction des longueurs d et d' des diagonales :A = $\frac{dxd'}{2}$

Partie B : Dans un repère.

On considère le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS})$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].



a) Justifier que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQC).

Dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS})$:A(1 ;0 ;0), B(0 ;1 ;0), C(-1 ;0 ;0) et S(0 ;0 ;1).

P est le milieu de [AS] donc $x_P=\frac{1+0}{2}=0,5$; $y_P=\frac{0+0}{2}=0$; $z_P=\frac{0+1}{2}=0,5$

Q est le milieu de [BS] donc $x_Q=\frac{0+0}{2}=0$; $y_Q=\frac{1+0}{2}=0,5$; $z_Q=\frac{0+1}{2}=0,5$

$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0-0,5\\0,5-0\\0,5-0,5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix}0+1\\0,5-0\\0,5-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix}1\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$ $\qquad \frac{-0,5}{1}=-0,5 \quad \frac{0,5}{0,5}=1$

-0,5≠1 donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}.\overrightarrow{PQ}=1\text{x}(-0,5)+1\text{x}0,5+(-3)\text{x}0=-0,5+0,5+0=0 \text{ donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{PQ} \\ \vec{n}.\overrightarrow{CQ}=1\text{x}1+1\text{x}0,5+(-3)\text{x}0,5=1+0,5-1,5=0 \text{ donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{CQ}\end{array}\right\}$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et$\overrightarrow{CQ}$ non colinéaires du plan (PQC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (PQC)

b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).

(PQC) a une équation de la forme ax+by+cz+d = 0
$\vec{n}\perp(PQC) \Leftrightarrow x+y-3z+d=0$
C(-1 ;0 ;0)∈(PQC) ⬄-1+0-3x0 +d=0 ⬄d=1
Donc le plan (PQC) a pour équation $x+y-3z+1=0$

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{SH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires donc } \vec{n} \text{ est un vecteur directeur de la droite (SH)} \\ S(0,0,1) \text{ est un point de la droite (SH)}\end{array}\right\}$$

Donc pour tout point M(x ; y ; z) de la droite (SH) :$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-3t+1\end{cases}$, t∈ℝ

b) Calculer les coordonnées du point H.

M(x ; y ; z) ∈(SH) ∩(PQC) ⬄$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-3t+1\\x+y-3z+1=0\end{cases}$ donc $t+t-3(-3t+1)+1=0 \Leftrightarrow 11t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{11}$

Donc $\begin{cases}x=\frac{2}{11}\\y=\frac{2}{11}\\z=-3\frac{2}{11}+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{11}\\y=\frac{2}{11}\\z=\frac{5}{11}\end{cases}$ donc H($\frac{2}{11}$;$\frac{2}{11}$;$\frac{5}{11}$)

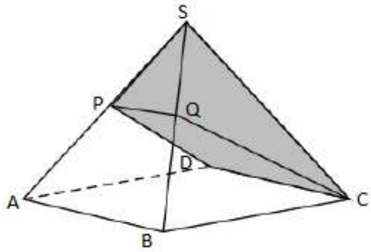
c) Montrer alors que la longueur SH est égale, en unités de longueur, à $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

: $\overrightarrow{SH}(\frac{2}{11};\frac{2}{11};\frac{5}{11}-1)$donc $\overrightarrow{SH}(\frac{2}{11};\frac{2}{11};\frac{-6}{11})$

Donc SH=$\sqrt{(\frac{2}{11})^2+\left(\frac{2}{11}\right)^2+(\frac{-6}{11})^2}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD est égale, en unités d'aires, ì
Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unités de volume.

$\mathbf{V_{SPQCD}} = \frac{1}{3}$**xaire de la basexhauteur** $= \frac{1}{3}\text{x}\frac{2\sqrt{11}}{11}\text{x}\frac{3\sqrt{11}}{8} = \frac{1}{\cancel{3}}\text{x}\frac{2\cancel{\sqrt{11}}}{\cancel{11}}\text{x}\frac{\cancel{3\sqrt{11}}}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ u. v.



Partie C : Partage équitable.

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ». Fanny à des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables. Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

Soit $\mathcal{V}$ le volume de la pyramide SABCD. $\mathcal{V}$ =1152cm²

V_{SPQCD} = 0,25u.v. or 1u.v. correspond au volume du cube défini à partir du repère orthonormé (O ;$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OS}$)

Donc 1u.v. =OA^3 =12^3 V_{SPQCD} = 0,25x12^3cm³=432cm³

$\frac{V_{SPQCD}}{V}$ =$\frac{432}{1152}$ =0,375≠0,5 donc le partage n'est pas équitable.

Exercice 5 : (3 points)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$$

1. Calculer les valeurs exactes des quatre premiers termes de la suite.

$u_0=0$ $u_1=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$ $u_2=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$ $u_3=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{6}{3}-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$

2. Conjecturer la limite de la suite puis démontrer ce résultat.
Toute prise d'initiative sera valorisée.

La suite semble converger vers 1.Pour le démontrer deux méthodes peuvent être envisagées :

a) **Première méthode** :

D'après le 1. On peut conjecturer la forme explicite de la suite (u_n).

Il semble que pour tout entier n, $u_n=\frac{n}{n+1}$. Démontrons le par récurrence :On pose P_n : « $u_n=\frac{n}{n+1}$ »

(1)*Initialisation* : n=0 $\frac{0}{0+1}$ =1 et u_0=0 donc P_0 est vraie.

(2)*Hérédité*

On suppose que P_n est vraie pour un entier n≥0, démontrons que P_{n+1} est vraie, c 'est-à-dire : $u_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$

P_n vraie ⇔ $u_n=\frac{n}{n+1}$ or $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$ donc $u_{n+1}=\frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}}=\frac{1}{\frac{n+2}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}$ donc P_{n+1} est vraie

La propriété est héréditaire.

(3) *Conclusion*

- P_0 est vraie
  La propriété est héréditaire ,donc pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{n}{n+1}$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty\end{array}\right\}$ Forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Levons l'indétermination : $u_n=\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$ =0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

b) **Deuxième méthode**

Il semble que la suite est croissante et majorée par 1 et donc qu'elle converge vers un réel $\ell \leq 1$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} \leq 1$

Posons P_n : "$u_n < u_{n+1} \leq 1$"

(1) *Initialisation*

$u_0=0$ $u_1=\frac{1}{2}$ donc $u_0 < u_1 \leq 1$ donc P_0 est vraie

(2) *Hérédité*

On suppose que P_n est vraie pour un entier n≥0, démontrons que P_{n+1} est vraie,
c 'est-à-dire : $u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$

P_n vraie ⇔ $u_n < u_{n+1} \leq 1$

⇔ $-u_n > -u_{n+1} \geq -1$ ↓ *On multiplie par un réel négatif, on change l'ordre*

⇔ $2-u_n > 2-u_{n+1} \geq 1$

⇔ $\frac{1}{2-u_n} < \frac{1}{2-u_{n+1}} \leq 1$ ↓ *La fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[*

⇔ $u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$ donc P_{n+1} est vraie

Donc la propriété est héréditaire

(3) *Conclusion*

- P_0 est vraie
- P_n est héréditaire
  donc pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} \leq 1$

donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

Donc la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \leq 1$.

Déterminons la valeur de ℓ :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \leq 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-u_n = 2-\ell \neq 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-\ell}$ $\Big\}$ Donc $\frac{1}{2-\ell}=\ell$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

$\frac{1}{2-\ell} = \ell \Leftrightarrow 1=\ell(2-\ell) \Leftrightarrow \ell^2-2\ell+1=0 \Leftrightarrow (\ell-1)^2=0 \Leftrightarrow \ell-1 \Leftrightarrow \ell=1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

3. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre, qui permet de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}.$$

Variables :	n est un entier a et b sont des réels	
Intialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 0 b prend la valeur 0,5	Dans a on place u_0 Dans b on place u_1
Traitement	Tant que $\lvert b-a \rvert > 10^{-3}$ n prend la valeur $n+1$ a prend la valeur b b prend la valeur $\frac{1}{2-b}$ Fin Tant que	Dans a on place u_n Dans b on calcule u_{n+1}
Sortie	Afficher n	