Série ES **02 mars 2016**
Durée de l'épreuve : 3 h

Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement spécifique -
Coefficient 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>*Exercice 1*</u> : Volume d'eau d'une retenue artificielle. (5 points)

Une retenue d'eau artificielle contient 120 000 m^3 d'eau le 1er juillet au matin.
Chaque jour, la chaleur provoque une évaporation de 5 % du volume total de l'eau dans la retenue.
De plus, chaque soir, on libère 600 m^3 d'eau de la retenue pour l'irrigation des cultures aux alentours.
Cette situation peut être modélisée par une suite (v_n).
Le 1er juillet au matin, le volume d'eau en m^3 est v_0 = 120 000. Pour tout entier naturel *n*, v_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du *n*-ième jour qui suit le 1er juillet.

1) a) Justifier que le volume d'eau v_1 au matin du 2 juillet est égal à 113 400 m^3.
   b) Déterminer v_2 et interpréter le résultat obtenu.
   c) Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $v_{n+1} = 0{,}95v_n - 600$.

2) Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on élabore l'algorithme ci-dessous.
Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à V la valeur 120 000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que V > 0
L6		Affecter à V la valeur …
L7		Affecter à N la valeur …
L8		Fin du tant que
L9	**Sortie :**	Afficher …

3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par : $u_n = v_n + 12\,000$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,95. Préciser son 1er terme.
   b) Exprimer u_n en fonction de *n*.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel *n* : $v_n = 132\,000 \times 0,95^n - 12\,000$.

4) a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
$$132\,000 \times 0,95^n - 12\,000 \leq 0$$
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Série ES **02 mars 2016**
Durée de l'épreuve : 3 h

Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement de spécialité -

Coefficient 7

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>*Exercice 1*</u> : Volume d'eau d'une retenue artificielle. (5 points)

Une retenue d'eau artificielle contient 120 000 m^3 d'eau le 1er juillet au matin.
Chaque jour, la chaleur provoque une évaporation de 5 % du volume total de l'eau dans la retenue.
De plus, chaque soir, on libère 600 m^3 d'eau de la retenue pour l'irrigation des cultures aux alentours.
Cette situation peut être modélisée par une suite (v_n).
Le 1er juillet au matin, le volume d'eau en m^3 est v_0 = 120 000. Pour tout entier naturel *n*, v_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du *n*-ième jour qui suit le 1er juillet.

1) a) Justifier que le volume d'eau v_1 au matin du 2 juillet est égal à 113 400 m^3.
   b) Déterminer v_2 et interpréter le résultat obtenu.
   c) Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $v_{n+1} = 0{,}95v_n - 600$.

2) Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on élabore l'algorithme ci-dessous.
Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à V la valeur 120 000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que V > 0
L6		Affecter à V la valeur …
L7		Affecter à N la valeur …
L8		Fin du tant que
L9	**Sortie :**	Afficher …

3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par : $u_n = v_n + 12\,000$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,95. Préciser son 1er terme.
   b) Exprimer u_n en fonction de *n*.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel *n* : $v_n = 132\,000 \times 0{,}95^n - 12\,000$.

4) a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :

$$132\,000 \times 0{,}95^n - 12\,000 \leq 0$$

   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 2 : Modélisation de la concentration d'un médicament dans le sang. (5 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 18 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang. On obtient la courbe fournie en annexe 1.

Partie A : Etude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1) la concentration à l'instant initial.

2) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,5 gramme par litre.

On fera apparaître sur le graphique les traits de construction nécessaires.

Partie B : Etude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0;18]$ par $f(x) = (x + 2{,}5)\,e^{-0{,}4x}$ où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Justifier que $f'(x) = -0{,}4x\,e^{-0{,}4x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0;18]$.

2) Justifier que l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;18]$.

3) Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.

4) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

```
1  deriver((x+2.5)*exp(-0.4*x))
                         exp(-0.4*x)-0.4*exp(-0.4*x)*(x+2.5)
2  deriver(exp(-0.4*x)-0.4*exp(-0.4*x)*(x+2.5))
                    -0.8*exp(-0.4*x)+0.16*exp(-0.4*x)*(x+2.5)
3  factoriser(-0.8*exp(-0.4*x)+0.16*exp(-0.4*x)*(x+2.5))
                              (0.16*x-0.4)*exp(-0.4*x)
```

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de f sur $[0;18]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

Partie C : Interprétation des résultats

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous :

1) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque sa concentration dans le sang est inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

2) La concentration du médicament dans le sang diminue plus ou moins rapidement au fil des heures.
On peut associer la fonction f' à la vitesse de diminution de cette concentration dans le sang. Au bout de combien de temps la baisse de la concentration ralentit-elle ?

Exercice 3 : Coût de fabrication et bénéfice lors d'une production de sorbets. (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Un artisan glacier commercialise des sorbets bio. Il peut en produire entre 0 et 400 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.
Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de I = [0 ; 4] par :

$$f(x) = 7x^2 - 16x ln(x)$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros. La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I.

Partie A :

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite (d) représentative de la fonction linéaire r sont données en annexe 2.

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.

1) Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
2) Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x.
3) Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

Partie B :

On note B(x) le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle [1 ; 4] on a :

$$B(x) = -7x^2 + 7x + 16x ln(x)$$

où B(x) est exprimé en centaines d'euros.

1) a) On note B′ la fonction dérivée de la fonction B.
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 4] on a : $B'(x) = -14x + 23 + 16ln(x)$
b) On note B″ la fonction dérivée de la fonction B′.
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 4] on a : $B''(x) = \frac{-14x+16}{x}$
2) a) En déduire le tableau de variation de la fonction B′ suivant :

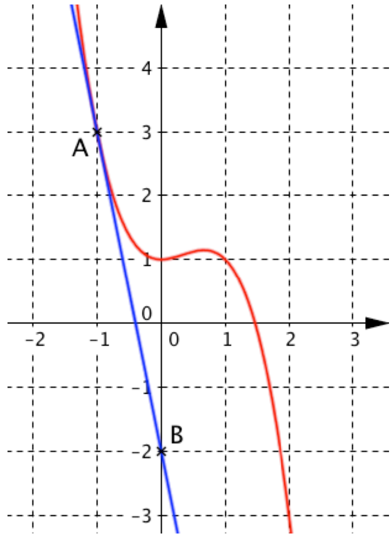
x	1	$\frac{8}{7}$	4
B′	9 ↗	$7 + 16\ln(\frac{8}{7})$	↘ $-33 + 16\ln(4)$

b) Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 4] puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
c) En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 4] puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.
3) L'artisan ayant un employé à rémunérer il décide de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 1 200 euros. Est-ce envisageable ? Justifier.

Exercice 4 : Vrai / Faux sur les fonctions, avec justification. (5 points)

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) La courbe $\mathscr{C}_h$ représentative d'une fonction *h* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-contre.
On a tracé la tangente (T) à au point $A(-1;3)$.
(T) passe par le point $B(0;-2)$.



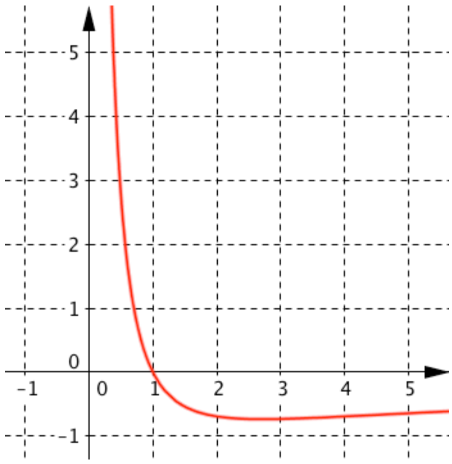
Proposition 1 : *Le nombre dérivé* $h'(-1)$ *est égal à* -2.

2) La fonction *h* représentée ci-contre est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -x^3 + x^2 + 1$$

Proposition 2 : $\mathscr{C}_h$ *admet pour point d'inflexion le point* $I\left(\frac{1}{3};\frac{29}{27}\right)$.

3) On désigne par *f* une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$
La courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de *f*, est donnée ci-contre. Le point de coordonnées $(1;0)$ est le seul point d'intersection de cette courbe et de l'axe des abscisses.



Proposition 3 : *La fonction f est convexe sur l'intervalle* $[1;+\infty[$.

4)

Proposition 4 : $e^{5\ln 2} \times e^{7\ln 4} = 2^{19}$

5) Arnaud a 1000 euros sur un livret qu'il n'approvisionne et ne consulte jamais. Un hacker s'en rend compte et parvient à pirater ce compte en prélevant discrètement 1% de ses économies chaque jour.

Proposition 5 : Le hacker aura réussi à voler 200 euros en 22 jours.

Exercice 4 : Agences de services et circuits dans les rues d'une ville. (5 points)

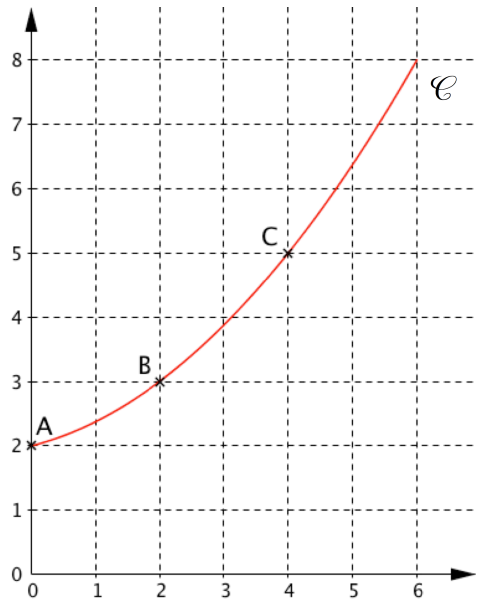
Les parties A et B sont indépendantes.

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisé par une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ donne le nombre d'agences en centaines.
La valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.

Sur le dessin ci-contre on a représenté graphiquement la fonction f.



Partie A :

On cherche à déterminer la valeur des coefficients a, b et c.

1) a) A partir des données de l'énoncé écrire un système d'équations traduisant cette situation.

b) En déduire que le système précédent est équivalent à : MX = R

avec : $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et R une matrice à préciser.

2) On admet que $M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a, b et c en détaillant les calculs.

3) Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possèdera au 1er janvier 2017.

Partie B :

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.

1) a) Déterminer si le graphe est connexe.

b) Déterminer si le graphe est complet.

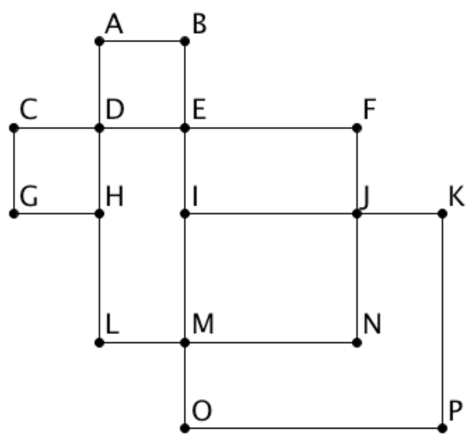
Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2) Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :

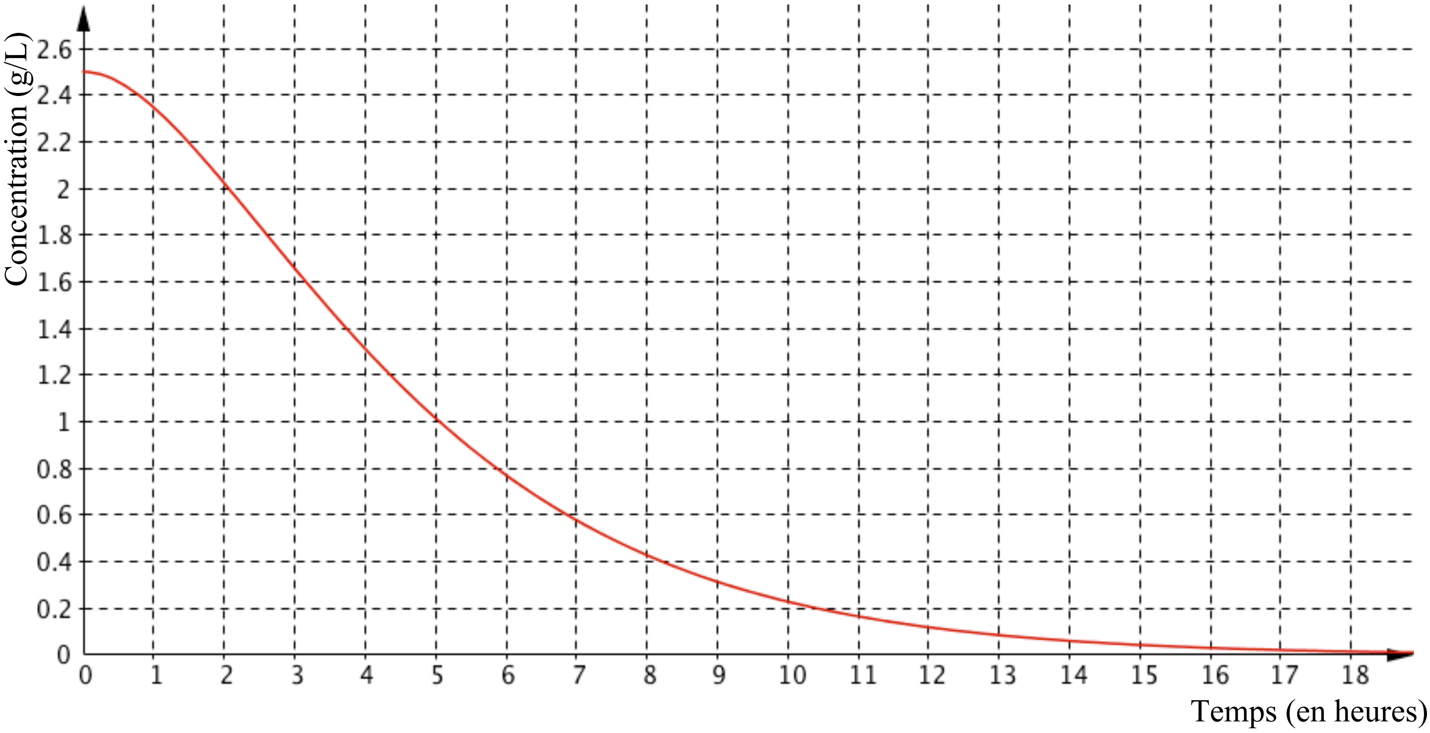
a) Le point d'arrivée est le même que le point de départ.

b) Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

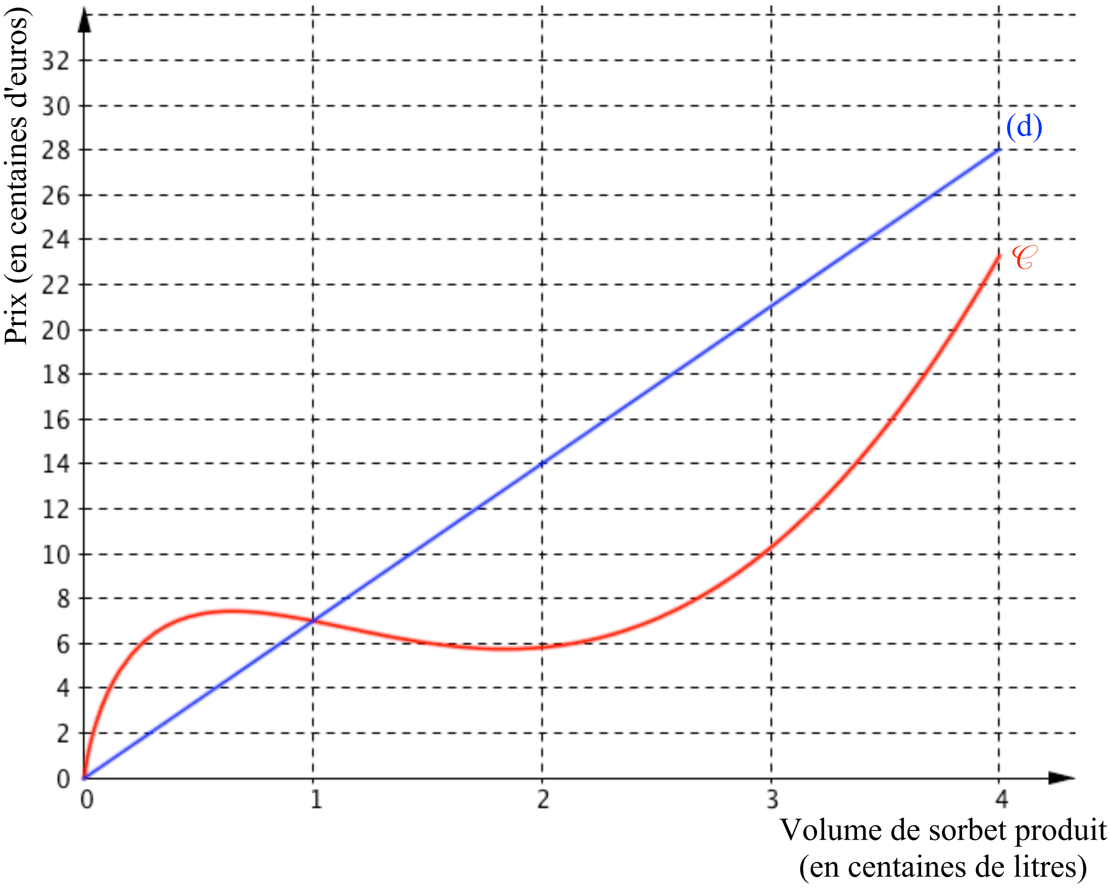
Donner un exemple de circuit possible, lorsqu'il existe.



Annexe 1 à rendre avec la copie



Annexe 2



Correction du bac blanc du 02 mars 2016

Exercice 1 : Volume d'eau d'une retenue artificielle.

Une retenue d'eau artificielle contient 120 000 m^3 d'eau le 1er juillet au matin.
Chaque jour, la chaleur provoque une évaporation de 5 % du volume total de l'eau dans la retenue.
De plus, chaque soir, on libère 600 m^3 d'eau de la retenue pour l'irrigation des cultures aux alentours.
Cette situation peut être modélisée par une suite (v_n).
Le 1er juillet au matin, le volume d'eau en m^3 est $v_0 = 120\,000$. Pour tout entier naturel n, v_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet.

1) a) $v_1 = v_0 - 0{,}05 \times v_0 - 600 = 120\,000 - 0{,}05 \times 120\,000 - 600 = 120\,000 - 6\,000 - 600 = 113\,400$
Le volume d'eau v_1 au matin du 2 juillet est égal à 113 400 m^3.

b) $v_2 = v_1 - 0{,}05 \times v_1 - 600 = 113\,400 - 0{,}05 \times 113\,400 - 600 = 113\,400 - 5\,670 - 600 = 107\,130$
Le volume d'eau v_2 au matin du 3 juillet est égal à 107 130 m^3.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}05 \times v_n - 600 = (1 - 0{,}05)\,v_n - 600 = 0{,}95\,v_n - 600$

2) Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on élabore l'algorithme ci-dessous.
Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à V la valeur 120 000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que V > 0
L6		Affecter à V la valeur 0,95 V – 600
L7		Affecter à N la valeur N + 1
L8		Fin du tant que
L9	**Sortie :**	Afficher N

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 12\,000$.

a) D'une part : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = v_{n+1} + 12\,000 = 0{,}95\,v_n - 600 + 12\,000 = 0{,}95\,v_n + 11\,400$
D'autre part : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0{,}95\,u_n = 0{,}95\,(v_n + 12\,000) = 0{,}95\,v_n + 0{,}95 \times 12\,000 = 0{,}95\,v_n + 11\,400$
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n$
On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,95.
Son 1er terme est : $u_0 = v_0 + 12\,000 = 120\,000 + 12\,000 = 132\,000$

b) Puisque (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de 1er terme $u_0 = 132\,000$.
Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 132\,000 \times 0,95^n$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 12\,000$
Donc : $v_n = u_n - 12\,000 = 132\,000 \times 0,95^n - 12\,000$

4) a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :

$$132\,000 \times 0,95^n - 12\,000 \leq 0$$
$$132\,000 \times 0,95^n \leq 12\,000$$
$$0,95^n \leq \frac{12000}{132000}$$
$$0,95^n \leq \frac{1}{11}$$
$$\ln(0,95^n) \leq \ln\left(\frac{1}{11}\right)$$
$$n \ln(0{,}95) \leq -\ln(11)$$

Or : $0{,}95 \in\ ]0;1[$ donc : $\ln(0{,}95) < 1$ On en déduit : $n \geq -\frac{\ln(11)}{\ln(0{,}95)}$

Or n est un nombre entier supérieur ou égal à : $-\frac{\ln(11)}{\ln(0{,}95)} \approx 46{,}7$. Donc : $n \geq 47$

b) Résoudre l'inéquation précédente revient à chercher la plus petite valeur de n pour laquelle v_n est négative ou nulle. Or, v_n désigne le volume d'eau en m^3 que contient la retenue au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet. On en déduit que la retenue d'eau sera vide 47 jours après le 1er juillet, soit le 17 août.

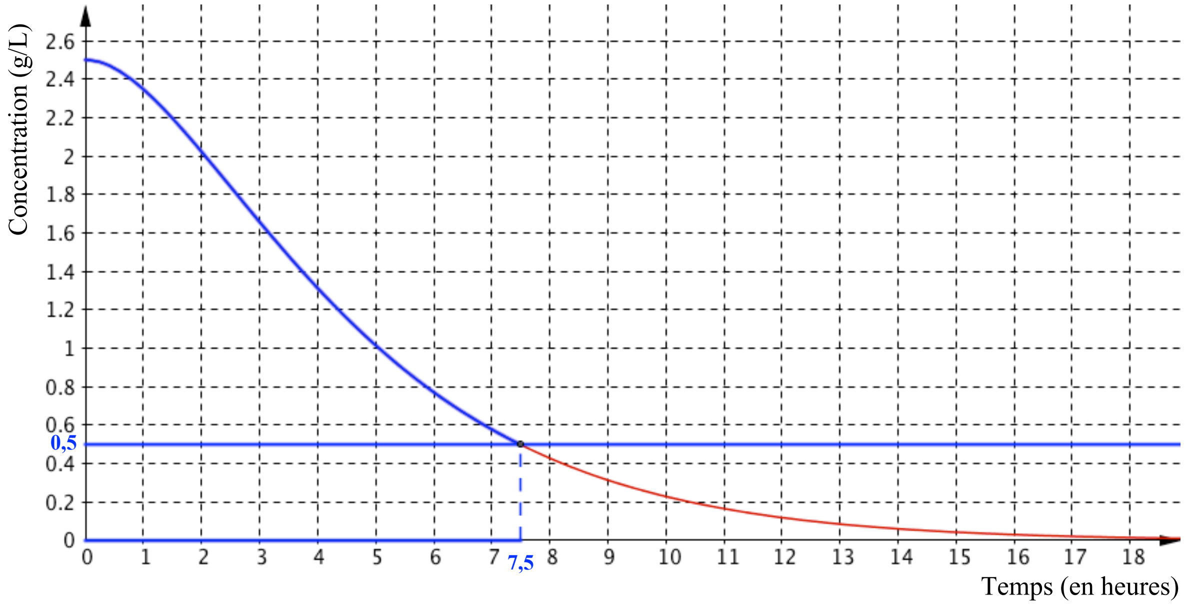
Exercice 2 : Modélisation de la concentration d'un médicament dans le sang.

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 18 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang. On obtient la courbe fournie en annexe 1.

Partie A : Etude graphique

1) Graphiquement, la concentration à l'instant initial était de 2,5 g/L.

2) Graphiquement, la concentration est supérieure ou égale à 0,5 g/L sur l'intervalle de temps $[0;7,5]$.



Partie B : Etude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0;18]$ par $f(x) = (x + 2,5)e^{-0,4x}$ où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1) $\forall x \in [0;18], f(x) = (x + 2,5)e^{-0,4x} = u(x)v(x)$

Donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x + 2,5 \\ v(x) = e^{-0,4x} \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -0,4\,e^{-0,4x} \end{cases}$

$$f'(x) = e^{-0,4x} + (x + 2,5)(-0,4\,e^{-0,4x}) = e^{-0,4x} - (0,4x + 1)\,e^{-0,4x}$$
$$f'(x) = e^{-0,4x} - 0,4x\,e^{-0,4x} - e^{-0,4x} = -0,4x\,e^{-0,4x}$$

$-0,4 < 0$ et : $\forall x \in [0;18]$, $e^{-0,4x} > 0$ donc : $f'(x) < 0$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	18
$f'(x)$	$-$	
f	2,5	$20,5\,e^{-7,2}$

Calcul des valeurs du tableau :

$f(0) = (0 + 2,5)e^{-0,4\times 0} = 2,5\,e^{0} = 2,5$

$f(18) = (18 + 2,5)e^{-0,4\times 18} = 20,5\,e^{-7,2}$

2) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0;18]$.
De plus : $f(18) = 20,5\,e^{-7,2} \approx 0,015$ Donc : $0,1 \in [20,5\,e^{-7,2};2,5]$.
On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;18]$.

3) En utilisant le tableur de la calculatrice on obtient :

- $f(12) \approx 0,12 > 0,1$ et : $f(13) \approx 0,09 < 0,1$ Donc : $12 < \alpha < 13$
- $f(12,5) \approx 0,101 > 0,1$ et : $f(12,6) \approx 0,098 < 0,1$ Donc : $12,5 < \alpha < 12,6$

4) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

```
1 deriver((x+2.5)*exp(-0.4*x))
                    exp(-0.4*x)-0.4*exp(-0.4*x)*(x+2.5)
2 deriver(exp(-0.4*x)-0.4*exp(-0.4*x)*(x+2.5))
                    -0.8*exp(-0.4*x)+0.16*exp(-0.4*x)*(x+2.5)
3 factoriser(-0.8*exp(-0.4*x)+0.16*exp(-0.4*x)*(x+2.5))
                    (0.16*x-0.4)*exp(-0.4*x)
```

Le logiciel permet d'obtenir : $\forall\, x \in [0\,;18]$, $f''(x) = (0{,}16x - 0{,}4)\,e^{-0{,}4x}$
Pour étudier la convexité de f il faut déterminer le signe de $f''(x)$.
Or : $\forall\, x \in [0\,;18]$, $e^{-0{,}4x} > 0$. Donc le signe de $f''(x)$ est celui de $0{,}16x - 0{,}4$.
$0{,}16x - 0{,}4 > 0$
$0{,}16x > 0{,}4$
$x > \dfrac{0{,}4}{0{,}16}$
$x > 2{,}5$
On en déduit le tableau suivant :

x	0		$2{,}5$		18
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	
f		concave		convexe	

f est concave sur $[0\,;2{,}5]$ et convexe sur $[2{,}5\,;18]$.
f'' s'annule et change de signe en $x = 2{,}5$ donc la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet un point d'inflexion I d'abscisse 2,5.
Remarque : $f(2{,}5) = (2{,}5 + 2{,}5)\,e^{-0{,}4\times 2{,}5} = 5\,e^{-1} = \frac{5}{e}$. Donc le point d''inflexion est I $(2{,}5\,;\frac{5}{e})$.

Partie C : Interprétation des résultats

Aucune justification n'est attendue mais voilà quelques explications :

1) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque sa concentration dans le sang est inférieure à 0,1 g/L donc lorsque $f(x) < 0{,}1$. On a démontré que l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une unique solution α dans $[0\,;18]$.
La fonction f étant strictement décroissante sur $[0\,;18]$ on en déduit que : $f(x) < 0{,}1 \iff x > \alpha$.
Or : $12{,}5 < \alpha < 12{,}6$. On en déduit que le médicament reste actif pendant environ 12,6 heures.

2) La concentration du médicament dans le sang diminue plus ou moins rapidement au fil des heures.
On peut associer la fonction f' à la vitesse de diminution de cette concentration dans le sang. La vitesse f' ralentit une fois qu'elle a atteint son maximum, c'est-à-dire lorsque f'' s'annule et change de signe, c'est-à-dire pour $x = 2{,}5$. On en déduit que la baisse de la concentration ralentit au bout de 2,5 heures.

<u>*Exercice 3*</u> : Coût de fabrication et bénéfice lors d'une production de sorbets.

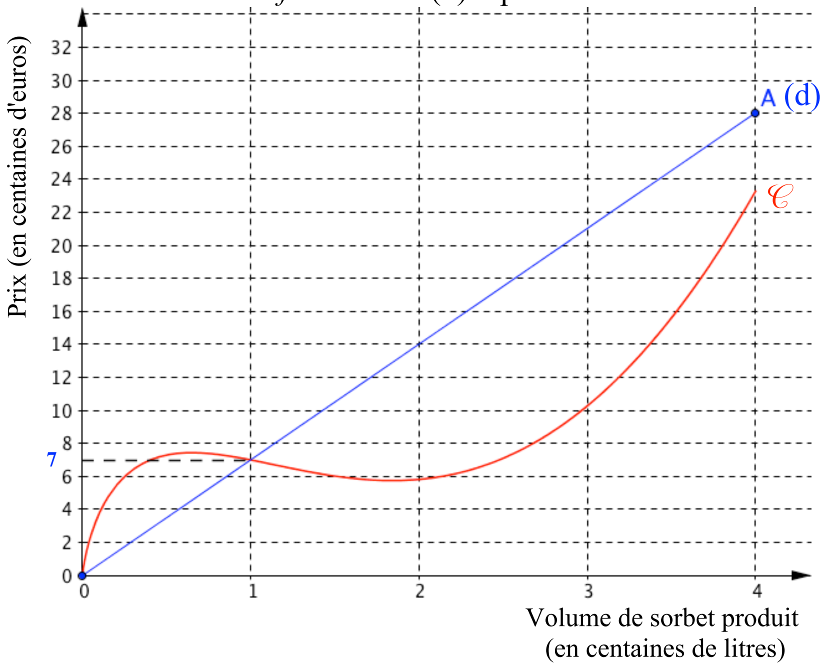
Un artisan glacier commercialise des sorbets bio. Il peut en produire entre 0 et 400 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.
Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction *f* définie pour tout nombre réel *x* de I = [0 ; 4] par :

$$f(x) = 7x^2 - 16x\ln(x)$$

Lorsque *x* représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros. La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction *r* définie sur le même intervalle I.

<u>Partie A</u> :

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction *f*. La droite (d) représente la fonction linéaire *r*.



1) Graphiquement, le prix de vente de 100 litres de sorbet est de 700 euros.

2) *r* est une fonction linéaire donc $r(x)$ s'écrit sous la forme : $r(x) = ax$ où *a* est un réel à déterminer.
A (4 ; 28) ∈ (d) donc : $r(4) = 28$

$$4x = 28$$

$$x = \frac{28}{4} = 7$$

On en déduit : $\forall x \in [0;4]$, $r(x) = 7x$.

3) Graphiquement, (d) est au dessus de $\mathscr{C}$ sur l'intervalle [1 ; 4]. Sur cet intervalle la recette est supérieure au coût de fabrication. Donc l'artisan doit produire au minimum 100 L de sorbet pour dégager un bénéfice.

<u>Partie B</u> :

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de *x* centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout *x* de l'intervalle [1 ; 4] on a :

$$B(x) = -7x^2 + 7x + 16x\ln(x)$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1) a) $\forall x \in [1;4]$, $B(x) = -7x^2 + 7x + 16x\ln(x) = -7x^2 + 7x + u(x)v(x)$

Donc : $\forall x \in [1;4]$, $B'(x) = -2\times 7x + 7 + u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = 16x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x) = 16 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$B'(x) = -14x + 7 + 16\ln(x) + 16x \times \frac{1}{x}$$

$$B'(x) = -14x + 7 + 16\ln(x) + 16$$

$$B'(x) = -14x + 23 + 16\ln(x)$$

b) $\forall x \in [1;4]$, $B'(x) = -14x + 23 + 16\ln(x)$

Donc : $\forall x \in [1;4]$, $B''(x) = -14 + 16 \times \frac{1}{x} = \frac{-14x}{x} + \frac{16}{x} = \frac{-14x+16}{x}$

2) a) En déduire le tableau de variation de la fonction B′ suivant :

x	1		$\frac{8}{7}$		4
B′			$7 + 16\ln(\frac{8}{7})$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	9				$-33 + 16\ln(4)$

Méthode :

- On commence par justifier le sens de variation et le maximum de B′ en étudiant le signe de $B''(x)$.
  $\forall\, x \in [1\,;4]$, $B''(x) = \frac{-14x+16}{x}$

  $-14x + 16 > 0$
  $-14x > -16$
  $x < \frac{16}{14}$
  $x < \frac{8}{7}$

  On en déduit le tableau des signes de $B''(x)$:

x	1		$\frac{8}{7}$		4
$-14x + 16$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$B''(x)$		$+$	0	$-$	

  On en déduit que B′ est croissante sur $[1\,;\frac{8}{7}]$ et décroissante sur $[\frac{8}{7}\,;4]$.
- On calcule les valeurs inscrites dans le tableau.
  $B'(1) = -14\times 1 + 23 + 16\ln(1) = -14 + 23 + 16\times 0 = 9$
  $B'(\frac{8}{7}) = -14\times\frac{8}{7} + 23 + 16\ln(\frac{8}{7}) = -2\times 8 + 23 + 16\ln(\frac{8}{7}) = -16 + 23 + 16\ln(\frac{8}{7}) = 7 + 16\ln(\frac{8}{7})$
  $B'(4) = -14\times 4 + 23 + 16\ln(4) = -56 + 23 + 16\ln(4) = -33 + 16\ln(4)$

b) D'après le tableau de variation précédent, B′ est strictement positive sur $[1\,;\frac{8}{7}]$ donc l'équation $B'(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

En revanche, B′ est continue, strictement décroissante et change de signe sur l'intervalle $[\frac{8}{7}\,;4]$ puisque :

$B'(\frac{8}{7}) = 7 + 16\ln(\frac{8}{7}) \approx 9{,}1 > 0$ et : $B'(4) = -33 + 16\ln(4) \approx -10{,}8 < 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[\frac{8}{7}\,;4]$.

Finalement, l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;4]$.

En utilisant le tableur de la calculatrice on obtient :

- $B'(2) \approx 6 > 0$ et : $B'(3) \approx -1{,}4 < 0$ Donc : $2 < \alpha < 3$
- $B'(2{,}8) \approx 0{,}27 > 0$ et : $B'(2{,}9) \approx -0{,}56 < 0$ Donc : $2{,}8 < \alpha < 2{,}9$
- $B'(2{,}83) \approx 0{,}02 > 0$ et : $B'(2{,}84) \approx -0{,}06 < 0$ Donc : $2{,}83 < \alpha < 2{,}84$

c) D'après les résultats précédents, B′ est strictement positive sur $[1\,;\frac{8}{7}]$ puis :

- décroissante en restant positive sur $[\frac{8}{7}\,;\alpha]$.
- décroissante en devenant strictement négative sur $]\alpha\,;4]$

On en déduit le tableau de variation de B :

x	1		α		4
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B			$B(\alpha)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$B(4)$

Calcul des valeurs du tableau :

$B(1) = -7\times 1^2 + 7\times 1 + 16\times 1\ln(1) = -7 + 7 + 16\times 0 = 0$

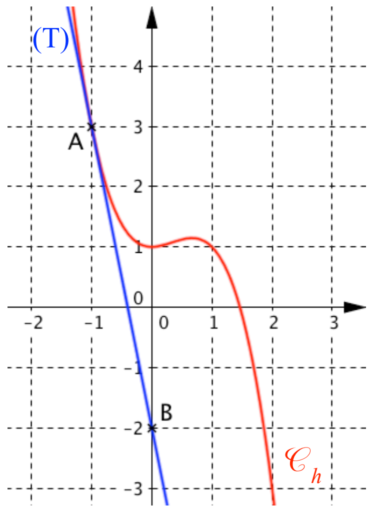
$B(4) = -7\times 4^2 + 7\times 4 + 16\times 4\ln(4) = -84 + 64\ln(4)$

3) L'artisan ayant un employé à rémunérer il décide de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 1 200 euros. Le bénéfice maximum est atteint pour la production de α centaines de litres de sorbet, avec : $2{,}83 < \alpha < 2{,}84$. Or, en utilisant le tableur de la calculatrice on obtient : $B(2{,}83) \approx B(2{,}84) \approx 10{,}85$. On en déduit que le bénéfice maximum réalisable est de 1 085 euros. L'artisan ne peut donc pas envisager d'atteindre un bénéfice d'au moins 1 200 euros.

Exercice 4 : Vrai / Faux sur les fonctions, avec justification.

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) La courbe $\mathscr{C}_h$ représentative d'une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-contre. On a tracé la tangente (T) à au point A(-1 ; 3). (T) passe par le point B(0 ; -2).



Proposition 1 : *Le nombre dérivé h '(-1) est égal à -2.*

h'(1) est égal au coefficient directeur de la tangente (T) au point A(-1 ; 3).
Or, (T) passe par le point B(0 ; -2).

Donc : $h'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-3}{0+1} = -5 \neq -2$

Donc la proposition 1 est fausse.

2) La fonction h représentée ci-contre est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -x^3 + x^2 + 1$$

Proposition 2 : *$\mathscr{C}_h$ admet pour point d'inflexion le point* I$\left(\frac{1}{3} ; \frac{29}{27}\right)$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -3x^2 + 2x$ et : $h''(x) = -6x + 2$

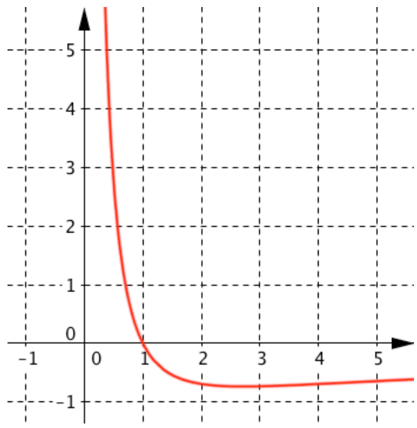
$h''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -6x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -6x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{6} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$

On en déduit que h'' s'annule et change de signe en $x = \frac{1}{3}$

$h\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + 1 = \frac{-1+3+27}{27} = \frac{29}{27}$

Donc la proposition 2 est vraie.

3) On désigne par f une fonction définie et deux fois dérivable sur [0 ; +∞[
La courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de f, est donnée ci-contre. Le point de coordonnées (1 ; 0) est le seul point d'intersection de cette courbe et de l'axe des abscisses.



Proposition 3 : *La fonction f est convexe sur l'intervalle* [1 ; +∞[.

Graphiquement, on voit que f'' est positive sur [0 ; 1] et négative sur [1 ; +∞[.
Donc f est convexe sur [0 ; 1] et concave sur [1 ; +∞[.
Donc la proposition 3 est fausse.

4) *Proposition 4* : $e^{5ln2} \times e^{7ln4} = 2^{19}$

$e^{5ln2} \times e^{7ln4} = e^{ln2^5} \times e^{ln4^7} = 2^5 \times 4^7 = 2^5 \times (2^2)^7 = 2^5 \times 2^{2\times7} = 2^{5+14} = 2^{19}$

Donc la proposition 4 est vraie.

5) Arnaud a 1000 euros sur un livret qu'il n'approvisionne et ne consulte jamais. Un hacker s'en rend compte et parvient à pirater ce compte en prélevant discrètement 1% de ses économies chaque jour.

Proposition 5 : Le hacker aura réussi à voler 200 euros en 22 jours.

On peut modéliser la situation par une suite géométrique (u_n) de 1er terme u_0 = 1000 et de raison q = 0,99.
Le 1er terme correspond à la somme présente initialement sur le compte d'Arnaud. La raison correspond à une diminution journalière de 1 % de ses économies. u_n correspond à la somme restante au bout de n jours.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 1000 \times 0,99^n$

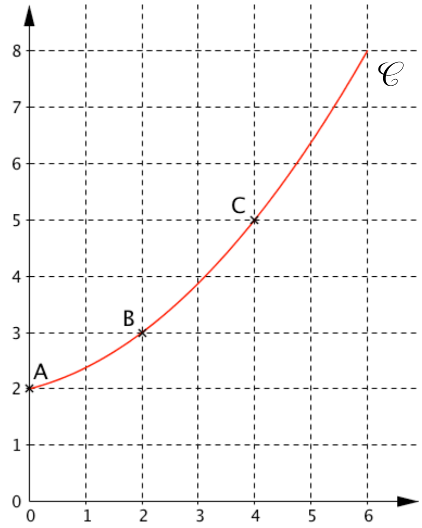
On cherche à savoir au bout de combien de jours le hacker aura volé 200 euros, c'est-à-dire le nombre de jours au bout desquels Anaud n'aura plus que 800 euros au maximum sur son compte. Pour cela, on résout :

$u_n \leq 800$
$1000 \times 0,99^n \leq 800$
$0,99^n \leq \frac{800}{1000}$
$0,99^n \leq 0,8$
$ln\,(0,99^n) \leq ln\,(0,8)$

$n\, ln\,(0,99) \leq ln\,(0,8)$
Or : 0,99 ∈]0 ; 1[Donc : ln (0,99) < 0
On en déduit : $n \geq \dfrac{ln(0,8}{ln(0,99)}$
Or : $n \in \mathbb{N}$ et : $\dfrac{ln(0,8}{ln(0,99)} \approx 22,2$ Donc : $n \geq 23$.
Donc la proposition 5 est fausse.

Exercice 4 : Agences de services et circuits dans les rues d'une ville.

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.



On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisé par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$
où a, b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ donne le nombre d'agences en centaines.
La valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.

Sur le dessin ci-contre on a représenté graphiquement la fonction f.

Partie A :

On cherche à déterminer la valeur des coefficients a, b et c.

1) a) $A(0;2) \in \mathscr{C}$ donc : $f(0) = 2$
donc : $0^2a + 0b + c = 2$
donc : $c = 2$

$B(2;3) \in \mathscr{C}$ donc : $f(2) = 3$
donc : $2^2a + 2b + c = 3$
donc : $4a + 2b + c = 3$

$C(4;5) \in \mathscr{C}$ donc : $f(4) = 5$
donc : $4^2a + 4b + c = 5$
donc : $16a + 4b + c = 5$

Donc a, b et c sont solutions du système (S) : $\begin{cases} c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=5 \end{cases}$

b) (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0a+0b+1c=2 \\ 4a+2b+1c=3 \\ 16a+4b+1c=5 \end{cases} \Leftrightarrow$ MX = R avec : $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $R=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $MX = R \Leftrightarrow X = M^{-1}R \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{8}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8} \\ -\frac{6}{4}+3-\frac{5}{4} \\ 2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-6+5}{8} \\ \frac{-6+12-5}{4} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$

On en déduit : $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = 2$.

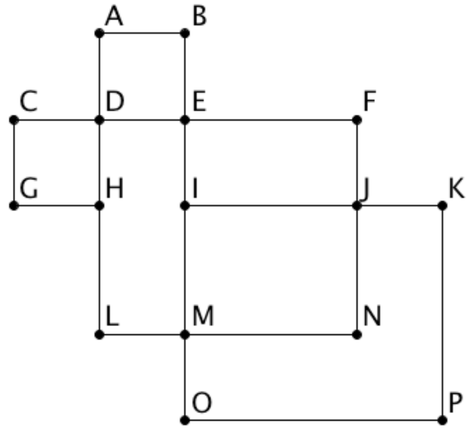
3) $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$.

$f(7) = \frac{1}{8} \times 7^2 + \frac{1}{4} \times 7 + 2 = \frac{49}{8} + \frac{7}{4} + 2 = \frac{49+14+16}{8} = \frac{79}{8} = 9{,}875$

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ donne le nombre d'agences en centaines. Donc, suivant ce modèle, l'entreprise possèdera environ 988 agences au 1er janvier 2017.

Partie B :

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.



1) a) La chaîne A-B-E-I-M-L-H-G-C-D-E-F-J-K-P-O-M-N permet de relier tous les sommets entre eux. Donc n'importe quelle paire de sommet peut être reliée par une chaîne.
On en déduit que le graphe est connexe.

b) Le graphe n'est pas complet car tous ses sommets ne sont pas adjacents. Par exemple, les sommets B et F ne sont pas adjacents.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2) Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :

a) Le point d'arrivée est le même que le point de départ.

Il existe un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue et dont le point d'arrivée est le même que le point de départ si le graphe admet un cycle eulérien. D'après le théorème d'Euler ce n'est le cas que si tous les sommets sont de degrés pairs. Or, les sommets H et I sont de degré 3.
Le graphe n'admet donc pas de cycle Eulérien et on ne peut pas déterminer un tel circuit.

b) Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.
Un tel circuit existe, d'après le théorème d'Euler, car seuls les sommets H et I sont de degrés impairs.
Remarque : On peut faire apparaître les degrés de chaque sommet dans un tableau pour le justifier.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Degrés	2	2	2	4	4	2	2	3	3	4	2	2	4	2	2	2

On peut déterminer une chaîne eulérienne à l'aide de l'algorithme d'Euler :

Etape	Cycle à insérer	Chaîne courante
1	Aucun	H–L–**M**–I
2	M–O–P–K–J–N–M	H–L–M–O–P–K–**J**–N–M–I
3	J–I–E–D–H–G–C–D–A–B–E–F–J	H–L–M–O–P–K–J–I–E–D–H–G–C–D–A–B–E–F–J–N–M–I