SERIE S **Janvier 2016**

MATHEMATIQUES: Enseignement obligatoire
Epreuve de type bac

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Barème :(établi sur 20 points) Exercice n°1 : 4 points ; Exercice n°2 : 5 points ; Exercice n°3 : 3points ;
Exercice n°4 : 3 points ; Exercice n°5 : 5 points .

Exercice n°1

Une jardinerie vend de jeunes plans d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plans proviennent de l'horticulteurH_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3.Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
   On envisage les événements suivants :
   - $\boldsymbol{H_1}$ « L'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »
   - $\boldsymbol{H_2}$ « L'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »
   - $\boldsymbol{H_3}$ « L'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »
   - **C** « L'arbre choisi est un conifère »
   - **F** « L'arbre choisi est un feuillu».

   a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation
   b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
   c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
   d) L'arbre choisi est un conifère .Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.
2. On choisit un échantillon au hasard de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie .On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock. On arrondira les valeurs obtenues à 10^{-3}.
   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
   c) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte au moins deux arbres feuillus ?

Exercice n°2 :

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3x0,5^n$$

1. **a.** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n), approchées à 10^{-2} près.

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
u_n	*2*								

   b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n \geq \frac{15}{4}x0,5^n.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul u_{n+1} - $u_n \leq 0$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).
   Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n$ - 10x$0,5^n$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ .On précisera le premier terme de la suite.
   b. En déduire, que, pour tout entier naturel n, $u_n = - 8x(\frac{1}{5})^n + 10x0,5^n$.
   c. Déterminer la limite de la suite u_n.

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche la plus petite valeur de *n* telle que $u_n \leq 0,01$.

```
Entrée :    n et u sont des nombres
Initialisation :  n prend la valeur 0
                  u prend la valeur 2
Traitement : Tant que…                       (1)
                | n prend la valeur ….        (2)
                | u prend la valeur ….        (3)
               Fin Tant que
Sortie : Afficher n
```

Exercice n°3 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.

Chaque réponse correcte rapporte un point .Un réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ,\vec{j} ,\vec{k})$.

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A(1 ;-1 ;2), B(3 ;3 ;8), C(-3 ;5 ;4) et D(-1 ;1 ;6).

On note Δ la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = k + 1 \\ y = 2k - 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$,

et Δ' la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = k' + 1 \\ y = k' + 3 \\ z = -k' + 4 \end{cases}$ $k' \in \mathbb{R}$,

1. **a.** Les points A, D et C sont alignés
   b. Le triangle ABC est rectangle en A.
   c. Le triangle ABC est équilatéral.
   d. Le point D est le milieu du segment [AB].

2. **a.** Les droites Δ et Δ' sont parallèles.
   b. Les droites Δ et Δ' sont coplanaires.
   c. Le point D appartient à la droite Δ.
   d. Le point D appartient à la droite Δ'.

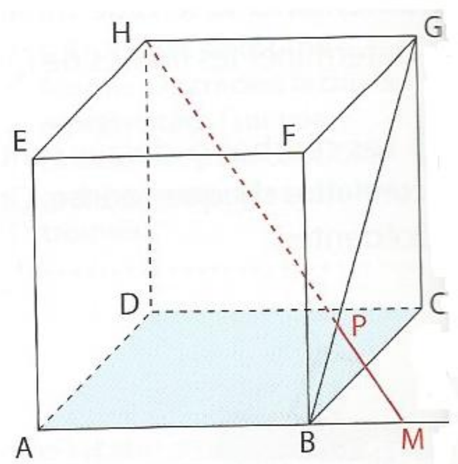
3. **a.** Le plan ABC a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 3t - 3t' \\ y = -1 + 3t + 5t' \\ z = 2 + 8t + 4t' \end{cases}$
   b. Le plan ABC et la droite Δ sont sécants en A
   c. Le plan ABC est parallèle à la droite Δ.
   d. Le plan ABC est parallèle à la droite Δ'.

Exercice n°4 :

Partie A : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$-{-6} par $f(x) = 6\sqrt{2}\,\frac{x}{x+6}$.

1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer f'(x)
3. En déduire le tableau des variations de la fonction f

Partie B :



Le cube ABCDEFGH a pour côté 6cm. A tout réel x strictement positif on associe le point M de la demi-droite [AB) tel que BM=x et $M \notin [AB]$.

1. Justifier que les droites (HM) et (BG) sont sécantes en un point que l'on notera P.
2. Exprimer la distance BP en fonction de x.
3. Lorsque le point M s'éloigne du point B sur la demi droite [AB), quelle sera la position limite du point P ?

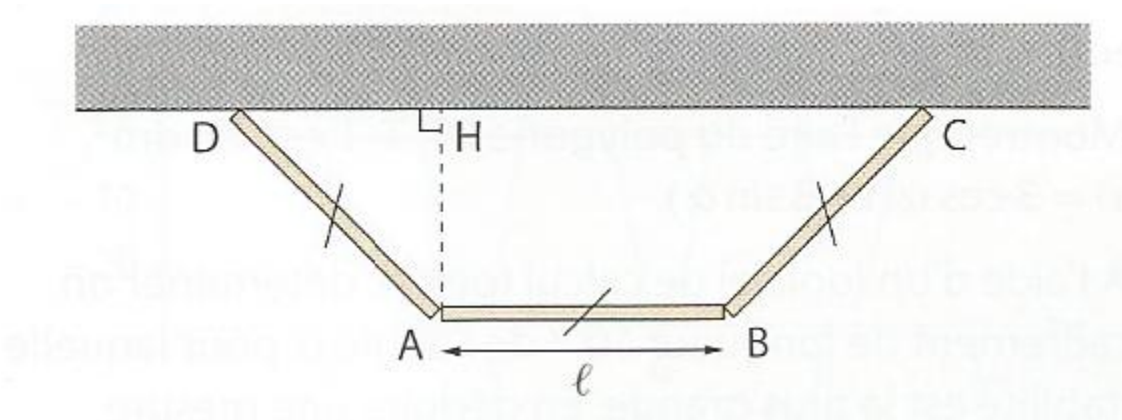
Exercice n°5

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g(x) = (1+cosx)sinx. On note C_g sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

1. Calculer g(-x) et g(x+2π) en fonction de g(x).Que peut-on dire de la fonction g ?
2. Justifier pourquoi il suffit d'étudier g sur [0 ; π].
3. Calculer g'(x).Prouver que g'(x)= (2cosx-1)(cosx+1)
4. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur [0 ; π].
5. Construire l'allure de C_g sur [-π ; π] dans un repère orthogonal.

Partie B

On souhaite créer le long d'un mur un massif de fleurs que l'on protègerait par une bordure (on ne met pas de bordure le long du mur).On dispose de trois morceaux de bois de même longueur ℓ =1 pour former cette bordure qui délimite un massif ayant la forme d'un trapèze isocèle .



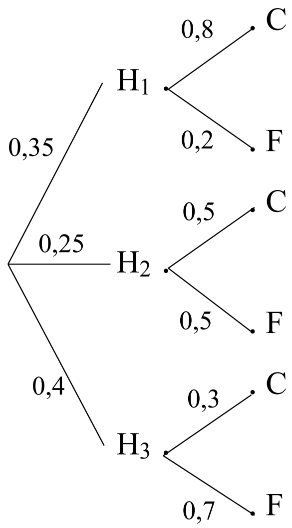
Soit α une mesure en radians de l'angle $\widehat{ADC}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Exprimer la hauteur AH et la longueur DC en fonction de α.
2. Montrer que l'aire du massif est donnée en fonction de α par A(α) = (1+cosα)sinα.
3. Déduire de la partie A, l'aire maximale du massif ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$ en radians puis en degrés.

Correction du Bac Blanc de janvier 2016

Exercice 1 :

1) a)



b) $P(H_3 \cap C) = p(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$

La probabilité que l'arbre choisit soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est de 0,12.

c) Les évènements H_1, H_2 et H_3 sont incompatibles donc, d'après la formules des probabilités totales :

$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C)$

$P(C) = p(H_1) \times P_{H_1}(C) + p(H_2) \times P_{H_2}(C) + p(H_3) \times P_{H_3}(C)$

$P(C) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}12$

$P(C) = 0{,}28 + 0{,}125 + 0{,}12 = 0{,}525$

d) $P_C(H_1) = \dfrac{p(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}525} = \dfrac{0{,}28}{0{,}525} \approx 0{,}533$

La probabilité qu'un conifère ait été acheté chez l'horticulteur H_1 est d'environ 0,533.

2) a) Choisir un arbre au hasard et observer s'il s'agit d'un conifère est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que deux issues possibles. On note C le succès et F l'échec. P (C) = 0,525.
On choisit un échantillon de 10 arbres dans un stock suffisamment grand pour que le choix des 10 arbres puisse être assimilé à des tirages avec remise. Donc on renouvelle l'expérience initiale 10 fois de manière indépendante. On obtient un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de conifères parmi les 10 arbres, prend les valeurs entières de 0 à 10. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(10;0{,}525)$.

b) $P(X=5) = \binom{10}{5} 0{,}525^5 (1-0{,}525)^5 = 252 \times 0{,}525^5 \times 0{,}475^5 \approx 0{,}243$

<u>Remarque</u> : Pour obtenir ce résultat on tape :

- BinomialPD(5,10,0.525) sur CASIO
- binomFdp(10,0.525,5) ou binompdf(10,0.525,5) sur TI

La probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est d'environ 0,243.

c) L'échantillon prélevé comporte au moins deux arbres feuillus s'il contient au maximum 8 conifères.

$P(X \leq 8) \approx 0{,}984$

La probabilité que l'échantillon prélevé comporte au moins deux arbres feuillus est d'environ 0,984.

<u>Remarque</u> : Pour obtenir ce résultat on tape :

- BinomialCD(8,10,0.525) sur CASIO
- binomFrèp(10,0.525,8) ou binomcdf(10,0.525,8) sur TI

Exercice 2 :

1) a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b) D'après ce tableau, on peut émettre la conjecture selon laquelle la suite (u_n) semble décroissante sur $\mathbb{N}$ et convergente vers 0.

2) a) On note, pour tout entier naturel n non nul, $\mathscr{P}n$: « $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ ».

Initialisation :

D'une part : $u_1 = 3{,}4$

D'autre part : $\frac{15}{4} \times 0{,}5^1 = \frac{15}{4} \times 0{,}5 = 1{,}875 \leq 3{,}4$

Donc : $u_1 \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^1$ Ainsi $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que $\mathscr{P}n$ est vraie à un rang $k \geq 1$. Démontrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c-à-d : $u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}$

$\mathscr{P}_k$ vraie <=> $u_k \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^k$ Or : $u_{k+1} = \frac{1}{5} u_k + 3 \times 0{,}5^k$

$$\frac{1}{5} u_k \geq \frac{1}{5}\left(\frac{15}{4} \times 0{,}5^k\right)$$

$$\frac{1}{5} u_k + 3 \times 0{,}5^k \geq \frac{1}{5}\left(\frac{15}{4} \times 0{,}5^k\right) + 3 \times 0{,}5^k$$

$$\frac{1}{5} u_k + 3 \times 0{,}5^k \geq \frac{1}{5}\left(\frac{15}{4} \times 0{,}5^k\right) + 3 \times 0{,}5^k$$

$$u_{k+1} \geq \frac{3}{4} \times 0{,}5^k + 3 \times 0{,}5^k$$

$$u_{k+1} \geq \left(\frac{3}{4} + 3\right) \times 0{,}5^k$$

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^k \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^k \times 0{,}5 \text{ car } 0 < 0{,}5 < 1$$

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}$$

Donc si $\mathscr{P}_k$ est vraie à un rang $k \geq 1$ alors $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est aussi. Ainsi $\mathscr{P}n$ est héréditaire.

Conclusion :

$\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}n$ est héréditaire sur $\mathbb{N}^*$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$. On en déduit successivement :

$$-\frac{4}{5} u_n \leq -\frac{4}{5} \times \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$$

$$-\frac{4}{5} u_n \leq -3 \times 0{,}5^n$$

$$-\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n \leq -3 \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

c) $u_1 < u_0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

$u_0 = 2 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$. Donc (u_n) est minorée par 0.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée sur $\mathbb{N}$ on en déduit qu'elle est convergente.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$

D'une part : $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5} u_n + (3 - 10 \times 0{,}5) 0{,}5^n = \frac{1}{5} u_n - 2 \times 0{,}5^n$

D'autre part : $\frac{1}{5} v_n = \frac{1}{5}(u_n - 10 \times 0{,}5^n) = \frac{1}{5} u_n - 2 \times 0{,}5^n$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$

De plus : $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$

On en déduit que (v_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -8$.

b) Puisque (v_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -8$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$

Donc : $u_n = v_n + 10 \times 0{,}5^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$

$-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

De même, $-1 < 0{,}5 < 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times 0{,}5^n = 0$

Ainsi, par somme de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4)

Entrée : n et u sont des nombres
Initialisation : n prend la valeur 0
u prend la valeur 2
Traitement : Tant que u > 0,01
n prend la valeur n + 1
u prend la valeur $-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

Exercice 3 :

1 – C (le triangle ABC est équilatéral)

Eléments de démonstration (non demandée) :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\3+1\\8-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ Donc $AB=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{56}$

De même : $AC=BC=\sqrt{56}$

2 – D (le point D appartient à Δ')

Eléments de démonstration (non demandée) :

En remplaçant x, y et z par les coordonnées de D dans la représentation paramétrique de Δ' on obtient :

$\begin{cases}-1=k'+1\\1=k'+3\\6=-k'+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k'=-2\\k'=-2\\k'=-2\end{cases}$ Donc D est le point de Δ' de paramètre -2.

3 – C (le plan ABC est parallèle à la droite Δ)

Eléments de démonstration (non demandée) :

En remplaçant x, y et z par les coordonnées de A dans la représentation paramétrique de Δ on obtient $k = 0$.

Donc A est un point qui appartient à la fois à Δ et au plan ABC.

On peut vérifier que Δ est incluse dans le plan ABC en montrant que le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ de Δ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$ sont coplanaires.

(On peut aussi montrer qu'un 2ème point de Δ, en particulier le point B, appartient au plan ABC).

Δ étant incluse dans le plan ABC, le plan ABC est parallèle à Δ.

Exercice 4 :

Partie A : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-6\},\ f(x)=6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6}$.

1) Recherche des limites de f à gauche et à droite en -6 :

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x<-6}} x=-6$

$x < -6 \iff x + 6 < 0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x<-6}} x+6=0^-$

Donc, par quotient de limites : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x<-6}} \dfrac{x}{x+6}=+\infty$. Or : $6\sqrt{2}>0$ Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x<-6}} (6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6})=+\infty$

$x > -6 \iff x + 6 > 0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x>-6}} x+6=0^+$ On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x>-6}} \dfrac{x}{x+6}=-\infty$ et : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x>-6}} (6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6})=-\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x<-6}} f(x)=+\infty$ et : $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\x>-6}} f(x)=-\infty$

Recherche des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x+6}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x}=1$ On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} (6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6})=6\sqrt{2}$

De même, puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x}=1$ Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} (6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6})=6\sqrt{2}$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=6\sqrt{2}$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6\sqrt{2}$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-6\},\ f(x) = 6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6} = 6\sqrt{2}\dfrac{u(x)}{v(x)}$

Donc : $f'(x) = 6\sqrt{2}\dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = x+6 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$f'(x) = 6\sqrt{2}\dfrac{x+6-x}{(x+6)^2} = 6\sqrt{2}\dfrac{6}{(x+6)^2} = \dfrac{36\sqrt{2}}{(x+6)^2}$

3) $36\sqrt{2} > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-6\},\ (x+6)^2 > 0$ donc f' est positive sur $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$6\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$6\sqrt{2}$

Partie B :

1) ABCDEFGH est un cube donc les arêtes [GH] et [AB] sont parallèles.
Le point M appartenant à la demi-droite [AB), on en déduit que les droites (BM) et (HG) sont parallèles.
Ainsi, les points B, M, G et H sont coplanaires. Donc les droites (HM) et (BG) sont coplanaires.
Puisque le point M appartient à la demi-droite [AB) sans appartenir au segment [AB] alors BMHG est un quadrilatère croisé. On en déduit que les droites (HM) et (BG) sont sécantes en un point P.

2) Les points B, P et G sont alignés dans le même ordre que les points M, P et H.
De plus, les droites (BM) et (GH) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{PB}}{\text{PG}} = \frac{\text{PM}}{\text{PH}} = \frac{\text{GH}}{\text{BM}}$$

$$\frac{\text{BP}}{\text{PG}} = \frac{x}{6}$$

P ∈ [BG] donc : PG = BG – BP.
On en déduit :

$$\frac{\text{BP}}{\text{BG} - \text{BP}} = \frac{x}{6}$$

BFGC est un carré donc le triangle BCG est rectangle et isocèle en C.
On applique le théorème de Pythagore :

$\text{BG}^2 = \text{BC}^2 + \text{CG}^2$

$\text{BG}^2 = 6^2 + 6^2$ (*__Remarque__* : on peut admettre que la diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$)

$\text{BG} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

Ainsi :

$$\frac{\text{BP}}{6\sqrt{2} - \text{BP}} = \frac{x}{6}$$

On utilise le produit en croix :

$6\,\text{BP} = (6\sqrt{2} - \text{BP})x$

$6\,\text{BP} = 6\sqrt{2}\,x - \text{BP}\,x$

$6\,\text{BP} + \text{BP}\,x = 6\sqrt{2}\,x$

$(6+x)\text{BP} = 6\sqrt{2}\,x$

$\text{BP} = 6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6}$

3) La longueur BP est définie par la fonction *f* étudiée dans la partie A.
On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6\sqrt{2}$
On en déduit, que lorsque le point M s'éloigne du point B sur la demi-droite [AB), c'est-à-dire lorsque BM = x tend vers $+\infty$, la longueur BP tend vers $6\sqrt{2}$. Or : BG = $6\sqrt{2}$. La position limite de P est donc G.

Exercice 5 :

Partie A : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=(1+\cos x)\sin x$

1) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x)=(1+\cos(-x))\sin(-x)=(1+\cos x)\times(-\sin x)=-(1+\cos x)\sin x=-g(x)$

On en déduit que g est une fonction impaire.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x+2\pi \in \mathbb{R}$ et $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+2\pi)=(1+\cos(x+2\pi))\sin(x+2\pi)=(1+\cos x)\sin x=g(x)$

On en déduit que g est une fonction 2π périodique.

2) Puisque g est 2π périodique, on peut construire sa représentation graphique en appliquant des translations de vecteurs $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$ à partir du tracer de $\mathscr{C}g$ sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple sur $[-\pi ; \pi]$.
Puisque g est impaire, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.
On peut donc restreindre l'étude de g sur $[0 ; \pi]$.

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=(1+\cos x)\sin x=u(x)v(x)$

Donc : $g'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$ avec : $\begin{cases} u(x)=1+\cos x \\ v(x)=\sin x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x)=-\sin x \\ v'(x)=\cos x \end{cases}$

$g'(x)=-\sin x\times\sin x+(1+\cos x)\cos x$

$g'(x)=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x$

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x+\sin^2 x=1$ On en déduit : $\cos^2 x-1=-\sin^2 x$

Donc : $g'(x)=\cos^2 x-1+\cos x+\cos^2 x=2\cos^2 x+\cos x-1$

D'autre part : $(2\cos x-1)(\cos x+1)=2\cos^2 x+2\cos x-\cos x-1=2\cos^2 x+\cos x-1$

Ainsi : $g'(x)=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

4) Pour étudier les variations de g on étudie le signe de $g'(x)$.

$2\cos x-1=0$

$2\cos x=1$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\cos x=\cos\dfrac{\pi}{3}$

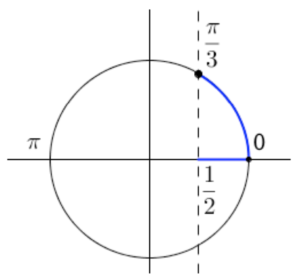
$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2k'\pi \end{cases}$

Sur $[0 ; \pi]$:
$2\cos x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

$2\cos x-1>0$

$2\cos x>1$

$\cos x>\dfrac{1}{2}$



Sur $[0 ; \pi]$:
$2\cos x-1>0 \Leftrightarrow x \in [0 ; \frac{\pi}{3}]$
$2\cos x-1<0 \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{3} ; \pi]$

$\cos x+1=0$

$\cos x=-1$

$\cos x=\cos\pi$

$\begin{cases} x=\pi+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\pi+2k'\pi \end{cases}$

Sur $[0 ; \pi]$: $\cos x+1=0 \Leftrightarrow x=\pi$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq -1$
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x+1 \geq 0$

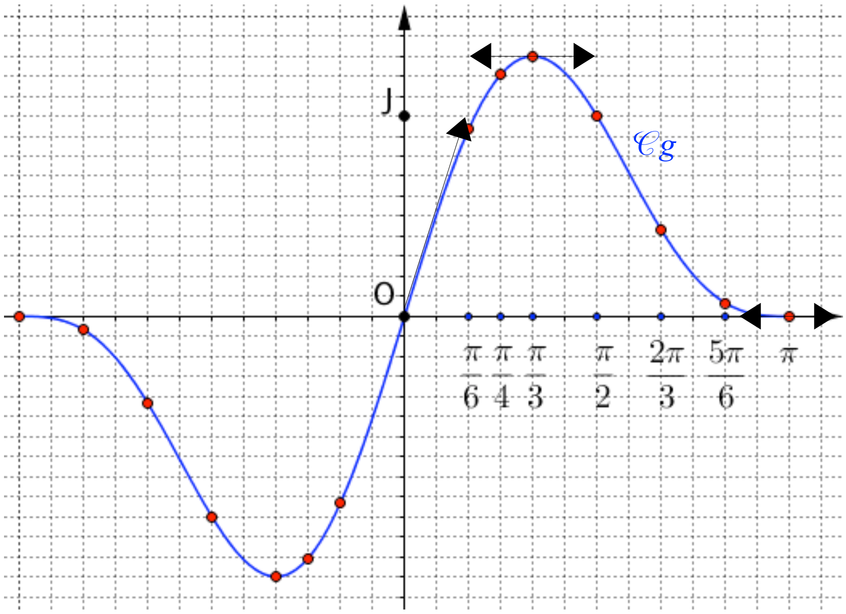
On en déduit le tableau de signes de $g'(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\cos x-1$	1	+	0	–	
$\cos x+1$	2	+		+	0
$g'(x)$	2	+	0	–	0

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$	2	+	0	–	0
g	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

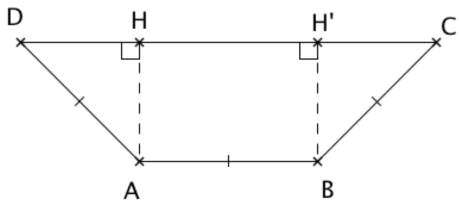
5)



<u>Partie B</u> :

1) $\sin\alpha = \sin\widehat{ADC} = \sin\widehat{ADH} = \frac{AH}{AD} = \frac{AH}{1} = AH$

Donc: $AH = \sin\alpha$
Soit H' le projeté orthogonal de B sur (DC).
Puisque ABCD est un trapèze isocèle, les triangles rectangles AHD et BH'C sont identiques.
De plus, ABH'H est un rectangle.
On en déduit : DC = DH + HH' + H'C = 2 DH + AB = 2 DH + 1



Or : $\cos\alpha = \cos\widehat{ADC} = \cos\widehat{ADH} = \frac{DH}{AD} = DH$

Donc: $DH = \cos\alpha$
Finalement : DC = 2 cos α + 1

2) L'aire d'un trapèze est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}(b+B)\,h$
où b, B et h désignent respectivement la petite base, la grande base et la hauteur.
Donc : $\mathscr{A}(\alpha) = \frac{1}{2}(AB + DC)\ AH = \frac{1}{2}(1 + 2\cos\alpha + 1)\sin\alpha = \frac{1}{2}(2 + 2\cos\alpha)\sin\alpha = (1+\cos\alpha)\sin\alpha$

3) L'aire du massif est définie par la fonction g étudiée dans la partie A.
D'après le tableau de variations de g, l'aire maximale du massif est atteinte pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad (soit 60°).

Cette aire maximale est : $\mathscr{A}\left(\frac{\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.