NOM Prénom : Série ES/L	4 février 2020 Durée de l'épreuve : 3h

Bac Blanc de Mathématiques

Le présent sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6 . Avant de commencer à composer, assurez-vous qu'il est complet.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le sujet sera rendu avec la copie ***sans en avoir ôté l'agrafe.***

<u>Exercice 1</u> : *(5 points)* **Commun à tous les candidats**

Au 1er janvier 2018, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $(2018 + n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5\ 000$ et $u_{n+1} = 0{,}96\ u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.

Combien de pommiers possédait l'arboriculteur au 1er janvier 2020 ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7\ 500$, pour tout entier naturel n.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7\ 500 - 2\ 500 \times 0{,}96^n$.

3. La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers. L'arboriculteur voudrait savoir en quelle année il devra acquérir un autre terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.

On considère l'algorithme ci-dessous :

Ligne 1	$n \leftarrow 0$
Ligne 2	$u \leftarrow 5\ 000$
Ligne 3	Tant que…
Ligne 4	$n \leftarrow n + 1$
Ligne 5	$u \leftarrow \ldots$
Ligne 6	Fin tant que

a. Recopier et compléter les lignes 3 et 5 de cet algorithme afin qu'il réponde à la problématique énoncée ci-dessus.

b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Si l'évolution se poursuit toujours selon ce modèle, vers quelle valeur va tendre à terme le nombre de pommiers de cet arboriculteur ? Justifier la réponse.

<u>Exercice 2</u> : (*6 points*) **Commun à tous les candidats**

Partie A

La courbe ($\mathscr{C}$) sur le graphique de l'annexe 1, associée à une fonction *f* définie sur l'intervalle [0;19], représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.

Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.

2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.

3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A(0;460) et B(3;82) est la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A.

Déterminer la valeur de $f'(0)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction *f* représentée par ($\mathscr{C}$).

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction *f* définie sur l'intervalle [0;29] par :

$$f(x)=(20x^2-80x+460)\mathrm{e}^{-0,1x}$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x=19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.

2. On note f' la fonction dérivée de *f* sur l'intervalle [0;29].

a. Démontrer que f' est définie par :

$$f'(x)=(-2x^2+48x-126)\mathrm{e}^{-0,1x}$$

b. On considère l'équation : $-2x^2+48x-126=0$.

Un logiciel de calcul formel donne :

Instruction :	Résultat :
Solve($-2x^2+48x-126=0$)	3 et 21

Retrouver ce résultat par le calcul.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0;29] et construire le tableau des variations de *f* sur l'intervalle [0;29]. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

d. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

3. Montrer que l'équation $f(x)=800$ admet une unique solution α dans l'intervalle [3;21].

Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de α.

Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000 ?

4. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse 0.

Exercice 3 : *(5 points)* **Commun à tous les candidats**

La courbe $\mathscr{C}_f$ sur le graphique de l'annexe 2 est la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [1,1;8].

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : étude graphique

1. Donner une valeur approchée du minimum de la fonction f sur l'intervalle [1,1;8].

2. Quel est le signe de $f'(5)$? Justifier.

3. La fonction f est-elle convexe sur [1,1;3] ? Justifier.

4. Donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 5$ sur l'intervalle [1,1;8].

Partie B : étude analytique

On admet que f est la fonction définie sur l'intervalle [1,1;8] par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{\ln(x)}$$

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [1,1;8], on a :

$$f'(x)=\frac{2\ln(x)-2+\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

2. Soit h la fonction définie sur [1,1;8] par : $h(x)=2\ln(x)-2+\frac{1}{x}$.

a. Soit h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle [1,1;8]. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [1,1;8], $h'(x)=\frac{2x-1}{x^2}$

b. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle [1,1;8].

c. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1,1;8]. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

3. Déduire des résultats précédents le signe de $h(x)$ sur l'intervalle [1,1;8].

4. À l'aide des questions précédentes, donner les variations de f sur [1,1;8].

Exercice 4 : *(4 points)* **Commun à tous les candidats**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une bonne réponse rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour répondre, vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et vous recopierez intégralement la proposition qui vous semble correcte.
Aucune justification n'est demandée.

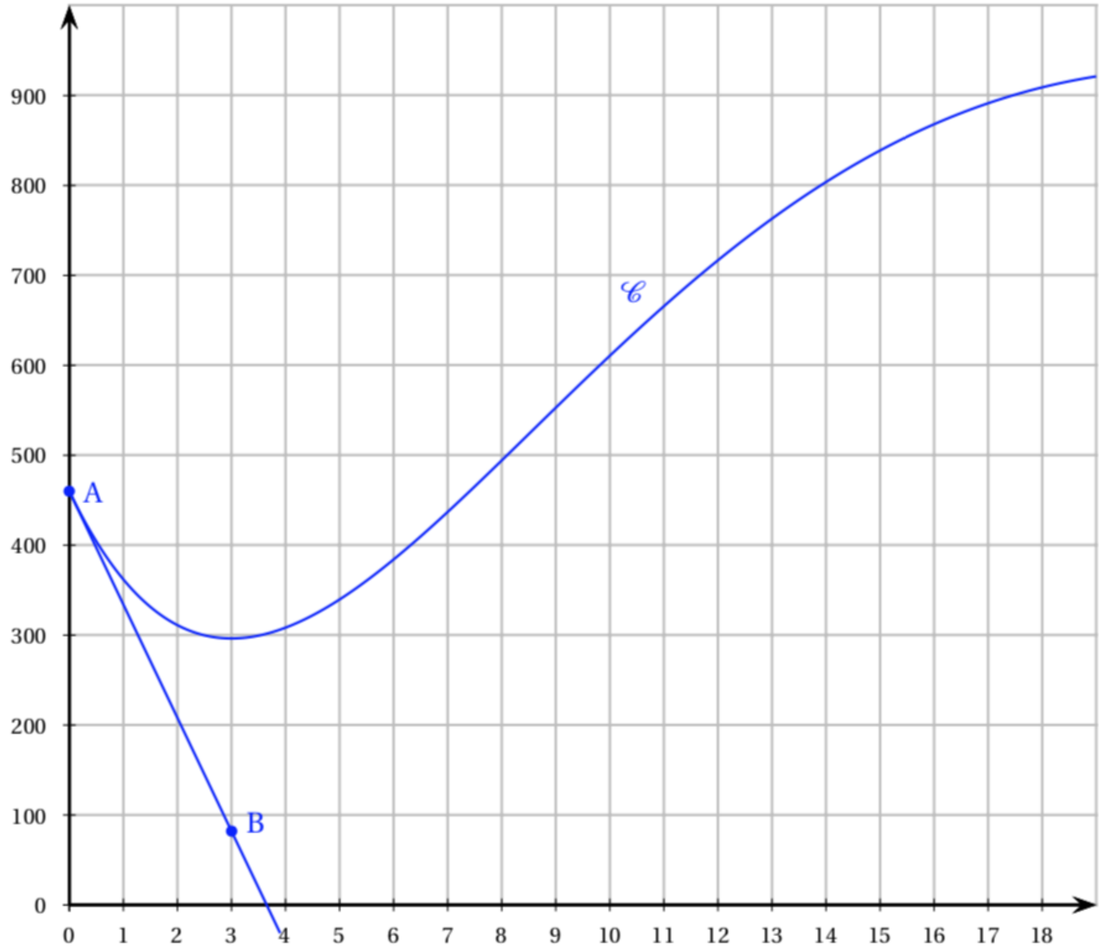
1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;30] par :
$f(x) = x^3 - 39x^2 + 315x + 45$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. On a alors :
A. f est convexe sur l'intervalle [0;30]
B. f est concave sur l'intervalle [5;21]
C. $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 13
D. Si f' désigne la fonction dérivée de f, alors f' est croissante sur l'intervalle [0;5] et sur l'intervalle [21;30].

2. L'équation $\ln(5) + \ln(x + 1) = 1$ a pour solution :
A. $x = \mathrm{e} - 6$
B. $x = -1$
C. $x=\frac{1}{5}\mathrm{e}-1$
D. $x = -0{,}5$

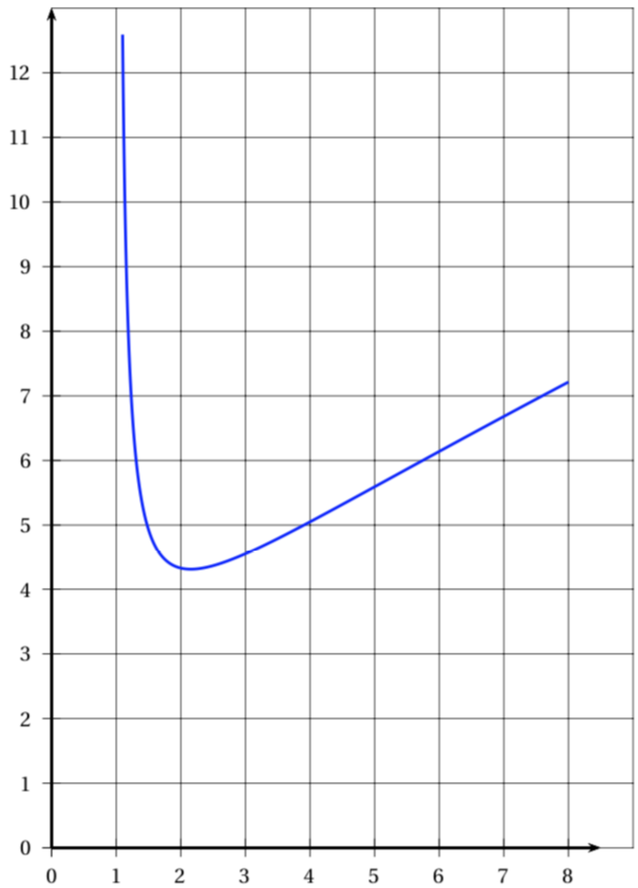
3. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - x$. Le nombre dérivé de f en 2 est égal à :
A. -1
B. 0
C. $2\ln(2) - 2$
D. $2\ln(2) - 1$

4. Le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n > 175$ est :
A. $n = \ln\left(\frac{175}{2}\right)$
B. $n = 7$
C. $n = 8$
D. $n = \ln 175 - \ln 2$

Annexe 1 :



Annexe 2 :



Bac Blanc de
Mathématiques n°1
Correction

<u>Exercice 1</u> : *(5 points)* **Commun à tous les candidats**

1. $u_1 = 0{,}96 \times u_0 + 300 = 0{,}96 \times 5\ 000 + 300 = 5\ 100$

$u_2 = 0{,}96 \times u_1 + 300 = 0{,}96 \times 5\ 100 + 300 = 5\ 196$

2020 = 2018 + 2 donc, comme u_2 = 5 196, on en déduit que l'arboriculteur possédait 5 196 pommiers le 1[er] janvier 2020.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7\ 500$, pour tout entier naturel n.

a. Pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 7\ 500$

D'où : $v_{n+1} = u_{n+1} - 7\ 500$

$v_{n+1} = 0{,}96u_n + 300 - 7\ 500$

$v_{n+1} = 0{,}96u_n - 7\ 200$

Or $v_n = u_n - 7\ 500$, d'où $u_n = v_n + 7\ 500$

On en déduit que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 0{,}96(v_n + 7\ 500) - 7\ 200$

$v_{n+1} = 0{,}96v_n + 7\ 200 - 7\ 200$

$v_{n+1} = 0{,}96v_n$

De plus, $v_0 = u_0 - 7\ 500 = 5\ 000 - 7\ 500 = -\ 2\ 500$.

Par conséquent, la suite (v_n) est la suite géométrique de raison q = 0,96 et de premier terme $v_0 = -\ 2\ 500$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$, soit $v_n = -2\ 500 \times 0{,}96^n$.

c. Puisque, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 7\ 500$, on a : $u_n = v_n + 7\ 500$, soit :

$u_n = -2\ 500 \times 0{,}96^n + 7\ 500$, ou encore $u_n = 7\ 500 - 2\ 500 \times 0{,}96^n$.

3. a.

Ligne 3	Tant que $u \leqslant 6\ 000$
Ligne 5	$u \leftarrow 0{,}96 \times u + 300$

b. À la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable n a pour valeur 13.

Cela signifie que l'arboriculteur devra acquérir de nouveaux terrains après 13 ans, soit en 2031.

4. Comme $0 < 0{,}96 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}96^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} -2\ 500 \times 0{,}96^n = 0$. On en déduit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} -2\ 500 \times 0{,}96^n + 7\ 500 = 7\ 500$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7\ 500$

Par conséquent, à long terme, le nombre d'arbres va tendre vers 7 500.

<u>Exercice 2</u> : (*6 points)* **Commun à tous les candidats**

Partie A

1. L'audience de cette chaîne a baissé pendant trois ans, de 2000 à 2003, passant de 460 000 à environ 300 000 téléspectateurs, puis elle a augmenté jusqu'en 2019 pour dépasser les 900 000 téléspectateurs.

2. Le 1[er] janvier 2014, il y avait environ 800 000 téléspectateurs qui regardaient cette chaîne.

3. Comme (AB) est la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A d'abscisse 0, *f'*(0) est égal au coefficient directeur de la droite (AB).

On a alors : $f'(0)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{82-460}{3-0}=-126$.

Partie B

1.2014 = 2000 + 14, on calcule donc l'image de 14 par *f* :

$f(14)=(20\times 14^2-80\times 14+460)\mathrm{e}^{-0,1\times 14}\approx 804$

Le 1[er] janvier 2014, il y avait environ 804 milliers de téléspectateurs sur cette chaîne.

2. a. *f* est une fonction produit. On a $f(x)=u(x)\times v(x)$ avec :

$u(x)=20x^2-80x+460$, d'où $u'(x)=40x-80$, et $v(x)=\mathrm{e}^{-0,1x}$, d'où $v'(x)=-0,1\,\mathrm{e}^{-0,1x}$.

On a alors : $f'(x)=(40x-80)\mathrm{e}^{-0,1x}-0,1(20x^2-80x+460)\mathrm{e}^{-0,1x}$

$f'(x)=(40x-80-2x^2+8x-46)\mathrm{e}^{-0,1x}$

$f'(x)=(-2x^2+48x-126)\mathrm{e}^{-0,1x}$

b. L'équation $-2x^2+48x-126=0$ est une équation du second degré. Pour la résoudre, on utilise le discriminant :

$\Delta = 48^2-4\times(-2)\times(-126)=1\,296$

Δ est positif donc cette équation possède deux solutions :

$x_1=\dfrac{-48-\sqrt{1\,296}}{2\times(-2)}=21$ et $x_1=\dfrac{-48+\sqrt{1\,296}}{2\times(-2)}=3$

On retrouve bien les deux solutions données par le logiciel de calcul formel.

c.Le polynôme $-2x^2+48x-126$ est négatif sauf lorsque *x* appartient à l'intervalle [3;21].

Comme e^x est positif pour tout réel *x*, on obtient :

x	0		3		21		29
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$	460	↘	296	↗	931	↘	823

d. D'après le tableau de variation de la fonction *f*, le maximum de cette fonction sur l'intervalle [0;29] est 931. La chaîne ne dépassera donc pas la barre du million de téléspectateurs journaliers avant l'année 2029.

3. Sur l'intervalle [3;21], *f* est continue, strictement croissante, $f(3) < 800$ et $f(21) > 800$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 800$ admet une unique solution sur cet intervalle. On la note α.

Comme $f(13)\approx 763$ et $f(14)\approx 804$, on a : $13 < \alpha < 14$.

Le nombre journalier de téléspectateurs dépassera donc 800 000 au cours de la 13[e] année, soit en 2013.

4. L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0)=(-2\times 0^2+48\times 0-126)e^{-0,1\times 0}=-126$ et $f(0) = 460$ (voir tableau de variation de la fonction f) donc l'équation de cette tangente est :

$y = -126x + 460$.

<u>Exercice 3 :</u> *(5 points)* **Commun à tous les candidats**

Partie A : étude graphique

1. Le minimum de la fonction f sur [1,1;8] est environ 4,3.

2. On constate graphiquement que f est croissante sur l'intervalle [4;6], par conséquent, $f'(5) > 0$.

3. Sur l'intervalle [1,1;3], f semble être au-dessus de ses tangentes, elle semble donc convexe.

4. Sur l'intervalle [1,1;8], l'équation $f(x) = 5$ admet 2 solutions.

Partie B : étude analytique

On admet que f est la fonction définie sur l'intervalle [1,1;8] par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{\ln(x)}$$

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [1,1;8], on a :

f est une fonction quotient. On a $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x)=2x-1$, d'où $u'(x)=2$, et $v(x)=\ln(x)$, d'où $v'(x)=\frac{1}{x}$.

On a donc : $f'(x)=\dfrac{2\ln(x)-(2x-1)\times\frac{1}{x}}{(ln(x))^2}$

$$f'(x)=\frac{2\ln(x)-2+\frac{1}{x}}{(ln(x))^2}$$

2. a. $h'(x)=2\times\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

$$h'(x)=\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$$

$$h'(x)=\frac{2x-1}{x^2}$$

b. Afin de déterminer les variations de h sur [1,1;8], on étudie le signe de h' sur cet intervalle.

Pour étudier le signe de $h'(x)$ sur [1,1;8], on résout l'inéquation $2x - 1 > 0$:

$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Donc sur l'intervalle [1,1;8], on a $2x - 1 > 0$.

De plus $x^2 > 0$ pour tout réel x.

On en déduit que $h'(x) > 0$ sur l'intervalle [1,1;8] et donc que h est croissante sur [1,1;8].

c. $h(1,1)=2\ln(1,1)-2+\frac{1}{1,1}\approx-0,9$

$h(8)=2\ln(8)-2+\frac{1}{8}\approx 2,3$

Sur l'intervalle [1,1;8], la fonction h est continue (puisque $x\longmapsto \ln(x)$ et $x\longmapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur [1,1;8]), strictement croissante (voir question 2.b.), $h(1,1) < 0$ et $h(8) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $h(2)\approx-0,113<0$ et $h(3)\approx 0,53>0$. On en déduit l'encadrement :

$2 < \alpha < 3$.

3. Puisque h est croissante sur [1,1;8] et $h(\alpha) = 0$, on en déduit :

$h(x) < 0$ sur $[1,1;\alpha[$ et $h(x) > 0$ sur $]\alpha;8]$

4. $f'(x)=\frac{2\ln(x)-2+\frac{1}{x}}{(ln(x))^2}=\frac{h(x)}{(ln(x))^2}$

Comme $(\ln(x))^2 > 0$ sur [1,1;8], f' a le même signe que h. On en déduit :

- sur $[1,1;\alpha[$, puisque $f'(x) < 0$, la fonction f est strictement décroissante
- sur $]\alpha;8]$, puisque $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante.

<u>Exercice 4 :</u> *(4 points)* **Commun à tous les candidats**
1. $f(x) = x^3 - 39x^2 + 315x + 45$
$f'(x) = 3x^2 - 78x + 315$
$f''(x) = 6x - 78$
Étude du signe de $6x - 78$:

$6x - 78 > 0 \Leftrightarrow 6x > 78 \Leftrightarrow x>\frac{78}{6} \Leftrightarrow x > 13$

Par conséquent f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 13$, on en déduit que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 13 (réponse C).

2. $\ln(5) + \ln(x + 1) = 1 \Leftrightarrow \ln(x + 1) = 1 - \ln(5) \Leftrightarrow x + 1 = e^{1-ln(5)} \Leftrightarrow x + 1 = \dfrac{e}{e^{ln}(5)} \Leftrightarrow x + 1 = \dfrac{e}{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{e}{5}-1$

(réponse C)

3. $f(x) = 2\ln(x) - x$ donc $f'(x) = \dfrac{2}{x}-1$.

$f'(2)=\dfrac{2}{2}-1=0$ donc le nombre dérivé de f en 2 est égal à 0 (réponse B)

4. $2^n > 175$

$\ln(2^n) > \ln(175)$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$n\ln(2) > \ln(175)$

$n > \dfrac{\ln(175)}{\ln(2)}$ car $\ln(2) > 0$ puisque $2 > 1$

Comme $\dfrac{\ln(175)}{\ln(2)} \approx 7{,}5$, on en déduit que le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n > 175$ est 8 (réponse C).