NOM Prénom :	17 mars 2020
Série ES/L	Durée de l'épreuve : 3h

Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement spécifique -

Le présent sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5. Avant de commencer, assurez-vous qu'il est complet.

L'utilisation d'une calculatrice, en mode examen est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (5 points)

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location. Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures. Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $u_0 = 280$.

On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 42$

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 420$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.

   b.Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant. On souhaite utiliser l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
U ← 280
Tant que .........
        N ← N+1
        U ← .........
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme.

   b) Que contient la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

   c) En déduire le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures.
5. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :

$$-140 \times 0,9^n + 420 > 380$$

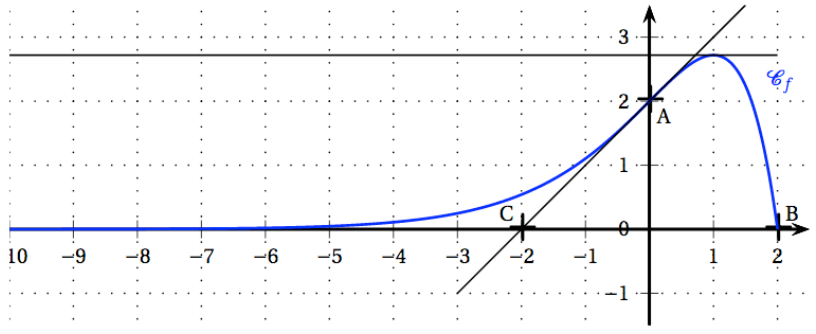
   et retrouver le résultat précédent.

Exercice 2 : (6 points)

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathscr{C}f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [- 10 ; 2]. On a placé les points A(0 ; 2), B(2 ; 0) et C(- 2 ; 0). On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}f$.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}f$ au point A.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle [- 10 ; 2].
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle [- 10 ; 2].
6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.

On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle [- 10 ; 2] par $f(x) = (2 - x)\,e^x$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à l'intervalle [- 10 ; 2].

   b) En déduire la valeur de $f'(1)$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
4. a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [- 10 ; 2].

   b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle [- 10 ; 2] puis donner une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
5. Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant :

1	$f(x) := (2 - x) * \exp(x)$
	$f(x) := (-x + 2)\mathrm{e}^x$
2	Simplifier(Dérivée(Dérivée($f(x)$)))
	$-x\mathrm{e}^x$

Utiliser le résultat du logiciel pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [- 10 ; 2].

<u>Exercice 3</u> : (4 points)

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- Étape 1 : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert;
- Étape 2 :
  - s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile;
  - sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Partie A

Un client joue à ce jeu. On note :

- N l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 »;
- E l'évènement « Le client obtient une étoile ».

1. a) Justifier que $P(N) = 0,3$ et que $P_N(E) = 0,8$.

   b) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.
3. Justifier que la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0,31$.
4. Le client a gagné un bon d'achat. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape ?

Partie B

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros. Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 euros par tranche de 100 clients y participant. Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel. On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 30 clients gagnants.
3. Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat? Le budget prévisionnel est-il suffisant?

<u>Exercice 4</u> : (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = 3\,ln(x) - 2x + 1$.
   Soit $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u dans un repère.

   Affirmation 1 : $y = x - 2$ est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_u$ au point d'abscisse 1.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[-8\,;-0,5]$ par : $h(x) = \dfrac{4x+1}{x^2}$.

   Affirmation 2 : La fonction h est concave sur l'intervalle $[-8\,;-0,75]$.

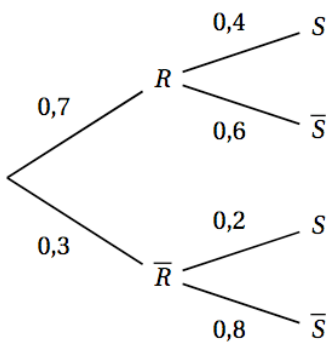
3. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
$f'(x)$	30 ↘	-5	↗ 20

   Affirmation 3 : La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

   Affirmation 4 : La fonction f est convexe sur $[5\,;15]$.

4. On considère l'arbre pondéré suivant :



   Affirmation 5 : La probabilité de $\bar{R}$ sachant S est $0,06$.

Exercice 4 : **Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité** (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un laboratoire en botanique étudie l'évolution d'une espèce végétale en fonction du temps. Cette espèce compte initialement 2 centaines d'individus.

Au bout de 2 semaines, l'espèce végétale compte 18 centaines d'individus.

Au bout de 3 semaines, l'espèce végétale prolifère et s'élève à $30,5$ centaines d'individus.

Au bout de 10 semaines, on en compte 90 centaines.

On modélise cette évolution par une fonction polynomiale f donnant le nombre d'individus de l'espèce, exprimé en centaine, en fonction du temps écoulé x, exprimé en semaine.

Ainsi $f(2) = 18$; $f(3) = 30,5$ et $f(10) = 90$.

On admet que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d, sont des réels

1. Justifier que $d = 2$.
2. Montrer que a, b et c sont solutions du système :

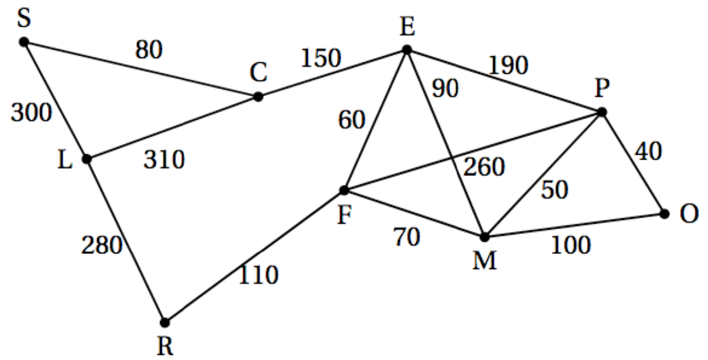
$$\begin{cases} 8a+4b+2c & = & 16 \\ 27a+9b+3c & = & 28{,}5 \\ 1000a+100b+10c & = & 88 \end{cases}$$

3. Déterminer les matricesA, X et B qui permettent d'écrire le système précédent sous la forme AX = B.
4. Résoudre le système.
5. En supposant que l'évolution suit, sur l'intervalle [0; 13], le modèle décrit par la fonction f, déterminer au bout de combien de temps la quantité de l'espèce étudiée sera maximale (arrondir à la semaine près).

Partie B

Le laboratoire en botanique possède un parc d'étude dans lequel est observée l'évolution de différentes espèces d'arbres. Les agents chargés du nettoyage circulent dans le parc depuis le local technique (L) jusqu'aux différentes parcelles plantées d'arbres : C, E, F, M, O, P, R et S.

Les sommets du graphe ci-dessous représentent les différentes parcelles et les arêtes marquent les allées permettant de se déplacer dans le parc. Les étiquettes rapportent la distance en mètre entre les parcelles.



1. a) Existe-t-il un parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et en y revenant? Si oui, donner un tel parcours.

   b) Existe-t-il un parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et sans nécessairement y revenir? Si oui, donner un tel parcours.
2. Déterminer un parcours de distance minimale joignant le local technique à la parcelle O.

Correction devoir type bac Mars 2020

Exercice 1 :

1. Février représente le premier mois après le mois de janvier, il faut donc calculer u_1.
$$u_1 = 0{,}9 \times u_0 + 42 = 0{,}9 \times 280 + 42 = 252 + 42 = 294$$
Ainsi, au mois de février 2019, 294 voitures ont été louées.
2. On pose $v_n = u_n - 420$. Ainsi, $u_n = v_n + 420$
   a. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 420 \\ &= 0{,}9u_n + 42 - 420 \\ &= 0{,}9(v_n + 420) + 42 - 420 \\ &= 0{,}9v_n + 0{,}9 \times 420 + 42 - 420 \\ &= 0{,}9v_n + 378 - 378 \\ &= 0{,}9v_n \end{aligned}$$
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme
   $$v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$$
   b. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = -140$
   Ainsi, $v_n = v_0 \times q^n = -140 \times 0{,}9^n$
   Or $u_n = v_n + 420 = -140 \times 0{,}9^n + 420$
3. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = -140$.
$0 < q < 1$ donc la suite (v_n) tend vers 0 quand n tend vers 0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -140 \times 0{,}9^n = 0$
et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -140 \times 0{,}9^n + 420 = 420$.
La commune ne possède que 380 voitures, la limite de la suite étant de 420, le nombre de voitures ne sera pas suffisant par rapport à l'évolution prévue.
4. Utilisation de l'algorithme
   a.
   ```
   N ← 0
   U ← 280
   Tant que U < 380
       N ← N + 1
       U ← U = 0.9U + 42
   Fin Tant que
   ```
   b. A la fin de l'algorithme, $n = 12$.
   c. Ainsi, $u_n > 380$ pour $n = 12$, soit 12 mois plus tard, à la fin du mois de janvier 2020 pour assurer la demande en février.
5. $$\begin{aligned} -140 \times 0{,}9^n + 420 &> 380 \\ -140 \times 0{,}9^n &> 380 - 420 \\ -140 \times 0{,}9^n &> -42 \\ 0{,}9^n &< \frac{-42}{-140} && \textit{on change le sens de l'inégalité car } -140 < 0 \\ 0{,}9^n &< 0{,}3 \\ n \ln 0{,}9 &< \ln 0{,}3 \\ n &> \frac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}9} && \textit{on change le sens de l'inégalité car } \ln 0{,}9 < 0 \\ n &> 11{,}4 \\ n &\geq 12 && \textit{car n est un entier naturel} \end{aligned}$$
On retrouve bien le résultat de la question précédente.

Exercice 2 :

Partie A

1. $f(0) = 2$ car $A(0; 2) \in \mathcal{C}_f$
   $f(2) = 0$ car $B(2; 0) \in \mathcal{C}_f$
2. $f'(1) = 0$ car $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1
3. La droite (AC) est la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$, l'équation de cette droite est :
   $y = x + 2$
4. L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions dans l'intervalle $[-10 ; 2]$
5. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-10 ; 1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
6. La fonction est convexe sur l'intervalle $[-10 ; 0]$ et concave sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

Partie B

$$f(x) = (2 - x)e^x$$

1. $f(0) = (2 - 0)e^0 = 2 \times 1 = 2$
   $f(2) = (2 - 2)e^2 = 0$
2. Etude de la dérivée
   a. $f'(x) = -1 \times e^x + e^x(2 - x)$
      $= e^x(-1 + 2 - x)$
      $= e^x(1 - x)$
   b. Ainsi $f'(1) = e^1(1 - 1) = 0$
3. Equation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
   $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
   $= e^0(1 - 0)(x - 0) + (2 - 0)e^0$
   $= x + 2$
4. Tableau de variation
   a. $f'(x) = e^x(1 - x)$
      $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$
      $1 - x > 0$
      $-x > -1$
      $x < 1$

x	-10		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			e^1 $\approx 2{,}718$		
	$12e^{-10} \approx 0{,}001$	↗		↘	0

Les valeurs sont arrondies à 10^{-3}

b. Sur l'intervalle $[-10; 1]$, f est continue, croissante et $f(x)$ est compris entre $0{,}001$ et $2{,}718$. Ainsi, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $[1; 2]$, f est continue, décroissante et $f(x)$ est compris entre $2{,}718$ et 0. Ainsi, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution sur cet intervalle.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.
On note α et β ces deux valeurs, en utilisant la calculatrice, on obtient
$\alpha \approx -1{,}15$ et $\beta \approx 1{,}84$

5. D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = -xe^x$
$e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-x$

x	-10		0		2
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi, f est convexe sur l'intervalle $[-10; 0]$ et f est concave sur l'intervalle $[0; 2]$.

Exercice 3 :

Partie A

1.

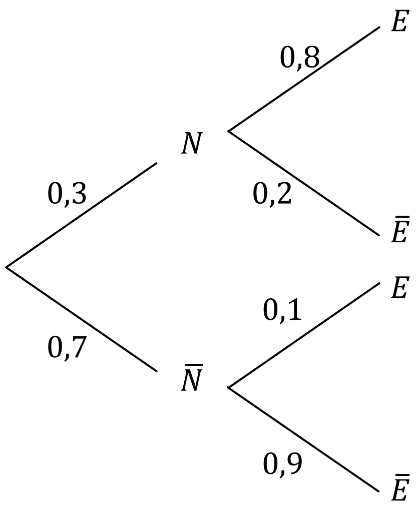
a. $P(N)$ est la probabilité d'obtenir un nombre entre 1 et 15 sur un total de 50.

$$P(N) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$P_N(E)$ est la probabilité d'obtenir une étoile sachant que le client a obtenu un nombre entre 1 et 15. Dans ce cas, le client tourne une roue divisée en 10 secteurs dont 8 contienne une étoile.

$$P_N(E) = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

b. arbre pondéré



2. On souhaite calculer $P(N \cap E)$.
$P(N \cap E) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$
La probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile est de 0,24

3. Le client gagne un bon d'achat s'il trouve une étoile, on souhaite calculer $P(E)$.
$P(E) = P(N \cap E) + P(\overline{N} \cap E) = 0{,}24 + 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}24 + 0{,}07 = 0{,}31$
Ainsi, la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0{,}31$.
4. On souhaite calculer $P_E(N) = \frac{P(N \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}24}{0{,}31} = \frac{24}{31} \approx 0{,}774$ arrondi à 10^{-3}.

Partie B

1. Simuler le jeu d'un client correspond à une épreuve de Bernoulli car il y a deux issues possibles, le succès, le client gagne le jeu de probabilité $p = 0{,}31$ et l'échec, le client ne gagne pas de probabilité $0{,}69$.
On répète cette expérience 100 fois de manière identique et indépendante, on réalise donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}31$.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}31$.
2. $P(X = 30) = \binom{100}{30} \times 0{,}31^{30} \times (1 - 0{,}31)^{100-30} \approx 0{,}085$ arrondi à 10^{-3}.
La probabilité qu'il y ait exactement 30 clients gagnants est de $0{,}085$.
3. Le nombre moyen de clients gagnant un bon d'achat correspond à l'espérance
$$E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}31 = 31$$
Le montant du bon d'achat est de 10€, le montant moyen de la somme offerte est donc de 310€ (31×10), le budget prévisionnel de 250€ est donc insuffisant.

Exercice 4 : (non spécialiste)

Exercice 4 : (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par : $u(x) = 3\,ln(x) - 2x + 1$.
Soit $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u dans un repère.

Affirmation 1 : $y = x - 2$ est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_u$ au point d'abscisse 1.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[-8\ ;-0,5]$ par : $h(x) = \dfrac{4x+1}{x^2}$.

Affirmation 2 : La fonction h est concave sur l'intervalle $[-8\ ;-0,75]$.

3. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\ ;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0		5		15
$f'(x)$	30	↘	-5	↗	20

Affirmation 1

$u(x) = 3\ln x - 2x + 1$ ainsi, $u'(x) = \frac{3}{x} - 2$
$u(1) = 3 \times \ln 1 - 2 \times 1 + 1 = -1$ et $u'(1) = \frac{3}{1} - 2 = 1$.

L'équation de la tangente à C_u au point d'abscisse 1 est
$y = u^{'}(1)(x-1) + u(1) = 1(x-1) + (-1) = x - 1 - 1 = x - 2$
<u>L'affirmation 1 est vraie</u>

Affirmation 2

$h(x) = \frac{4x+1}{x^2}$ donc $h^{'}(x) = \frac{4\times x^2 - 2x(4x+1)}{(x^2)^2} = \frac{4x^2-8x^2-2x}{x^4} = \frac{-4x^2-2x}{x^4} = \frac{-4x-2}{x^3}$

et $h^{''}(x) = \frac{-4\times x^3 - 3x^2(-4x-2)}{(x^3)^2} = \frac{-4x^3+12x^3+6x^2}{x^6} = \frac{8x^3+6x^2}{x^6} = \frac{8x+6}{x^4}$

$x^4 > 0$ donc $h^{''}(x)$ est du signe de $8x+6$

$8x + 6 > 0$
$8x > -6$
$x > -\frac{6}{8}$ donc $x > -0{,}75$

x	-8		$-0{,}75$		$-0{,}5$
$h^{''}(x)$		$-$	0	$+$	

Donc la fonction h est concave sur $[-8\,;\,-0{,}75]$
<u>L'affirmation 2 est vraie</u>

<u>Exercice 4</u> : (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = 3\,ln(x) - 2x + 1$.
   Soit $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u dans un repère.

   Affirmation 1 : $y = x - 2$ est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_u$ au point d'abscisse 1.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[-8\,;-0,5]$ par : $h(x) = \dfrac{4x+1}{x^2}$.

   Affirmation 2 : La fonction h est concave sur l'intervalle $[-8\,;-0,75]$.

3. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0		5		15
$f'(x)$	30	$\searrow$	-5	$\nearrow$	20

Affirmation 3

C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses si le coefficient directeur de cette tangente est nul et ainsi, $f^{'}(x) = 0$.
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, sur l'intervalle $[0\,;15]$, l'équation $f^{'}(x) = 0$ admet deux solutions. Ainsi, C_f admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.
<u>L'affirmation 3 est fausse</u>

Affirmation 4

La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[5; 15]$, ainsi, $f''(x) \geq 0$ sur cet intervalle donc f est convexe sur $[5; 15]$.
<u>L'affirmation 4 est vraie</u>

Affirmation 5

$$P_S(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}2}{0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}2} = \frac{0{,}06}{0{,}28 + 0{,}06} = \frac{0{,}06}{0{,}34} = \frac{3}{17} \approx 0{,}176 \neq 0{,}06$$

<u>L'affirmation 5 est fausse</u>

Exercice 4 : (spécialiste)

<u>Exercice 4</u> : Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un laboratoire en botanique étudie l'évolution d'une espèce végétale en fonction du temps. Cette espèce compte initialement 2 centaines d'individus.

Au bout de 2 semaines, l'espèce végétale compte 18 centaines d'individus.

Au bout de 3 semaines, l'espèce végétale prolifère et s'élève à $30,5$ centaines d'individus.

Au bout de 10 semaines, on en compte 90 centaines.

On modélise cette évolution par une fonction polynomiale f donnant le nombre d'individus de l'espèce, exprimé en centaine, en fonction du temps écoulé x, exprimé en semaine.

Ainsi $f(2) = 18$; $f(3) = 30,5$ et $f(10) = 90$.

On admet que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d, sont des réels

1. Justifier que $d = 2$.
2. Montrer que a, b et c sont solutions du système :

1. Initialement, l'espèce compte 2 centaines d'individus, ainsi $f(0) = 2$
   $f(0) = a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = d$
   Ainsi, $d = 2$
2. La fonction f respecte trois conditions, $f(2) = 18$, $f(3) = 30$ et $f(10) = 90$
   $f(2) = 18$
   $a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d = 18$
   $8a + 4b + 2c + 2 = 18$
   $8a + 4b + 2c = 16$

   $f(3) = 30{,}5$
   $a \times 3^3 + b \times 3^2 + c \times 3 + 2 = 30{,}5$
   $27a + 9b + 3c = 28{,}5$

   $f(10) = 90$
   $a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + 2 = 90$
   $1000a + 100b + 10c = 88$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c = 16 \\ 27a + 9b + 3c = 28{,}5 \\ 1000a + 100b + 10c = 88 \end{cases}$$

3. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \\ 1000 & 100 & 10 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 16 \\ 28{,}5 \\ 88 \end{pmatrix}$$

4. $AX = B$ équivaut à $X = A^{-1} \times B$

donc $X = \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 2{,}5 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}$

5. La fonction f a pour expression $f(x) = -0{,}2x^3 + 2{,}5x^2 + 3{,}8x + 2$

$f'(x) = -0{,}6x^2 + 5x + 3{,}8$

$\Delta = 5^2 - 4 \times (-0{,}6) \times 3{,}8 = 34{,}12$

$x_1 \approx 9{,}03$ et $x_2 \approx -0{,}7$

Ainsi, sur l'intervalle $[0; 13]$, la fonction f est croissante sur $[0; 9{,}03]$ et décroissante sur $[9{,}03 ; 13]$, le maximum est donc atteint après 9 semaines environ.

Partie B

1. a. Les sommets L et C sont de degré impairs, ainsi, d'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de cycle eulérien. Il n'est donc pas possible de parcourir toutes les allées une et une seule fois en partant du local technique et en y revenant.

   b. Il y a exactement deux sommets de degré impair dont L, d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne. Il est possible de trouver un parcours empruntant, une et une seule fois toutes les allées en partant de L.

   Un parcours possible est

   $L - S - C - L - R - F - M - E - F - P - O - M - P - E - C$