NOM Prénom :	17 mars 2020
Série S	Durée de l'épreuve : 4 h

Bac Blanc de Mathématiques

- Enseignement spécifique -

Le présent sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6. Avant de commencer, assurez-vous qu'il est complet.

L'utilisation d'une calculatrice, en mode examen est autorisée.

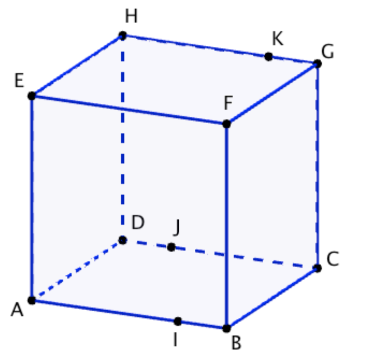
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : **5 points**

Les parties A, B, C et D de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points I, J et K définis par :



$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$$

Déterminer, en justifiant laquelle des affirmations suivantes est correcte :

- Affirmation 1 : la section du cube par le plan (IJK) est un triangle.
- Affirmation 2 : la section du cube par le plan (IJK) est un quadrilatère.
- Affirmation 3 : la section du cube par le plan (IJK) est un pentagone.
- Affirmation 4 : la section du cube par le plan (IJK) est un hexagone.

Partie B

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

On note d' la droite passant par le point $A(4; 4; -6)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(5; 2; -9)$.

Déterminer si les droites d et d' sont coplanaires ou non.

Partie C

On considère le plan $\mathscr{P}$ et la droite Δ définis par les représentations paramétriques suivantes :

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t' \\ z = t + t' \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R} \qquad \Delta : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -5 + k \\ z = -5 + 3k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

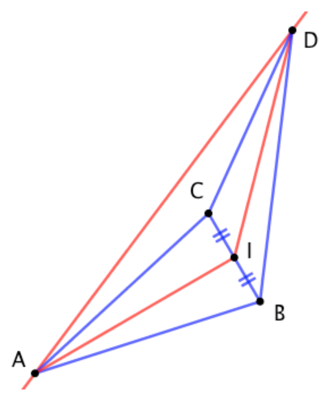
1. Le point A de paramètre 0 de Δ appartient-il à $\mathscr{P}$?
2. Soient $B(3; -5; -3)$ et $C(1; -3; -4)$ deux points de l'espace.

   Démontrer que les plans (ABC) et $\mathscr{P}$ sont parallèles.

Partie D

Soit ABC un triangle isocèle en A et I le milieu de [BC]. On considère un point D non situé dans le plan (ABC) et tel que le triangle BCD est isocèle en D.

1. Démontrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (AID).
2. En déduire que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales.



Exercice 2 : **5 points**

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades tandis que 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :

- S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
- M_n: « l'individu est malade en semaine n » ;
- I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

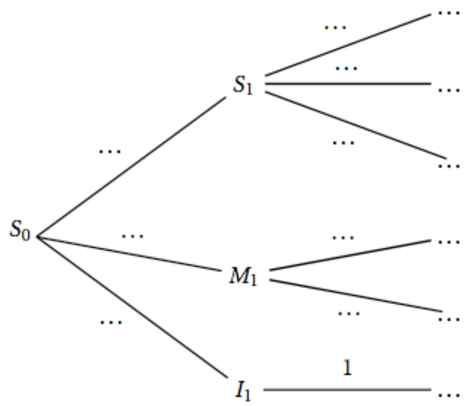
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S ». On a donc les probabilités suivantes :

$$P(\mathrm{S}_0) = 1 \text{ ; } P(\mathrm{M}_0) = 0 \text{ et } P(\mathrm{I}_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(\mathrm{I}_2) = 0,2025$
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie. Pour tout entier naturel n, on note :

$$u_n = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n),\ v_n = \mathrm{P}(\mathrm{M}_n) \text{ et } w_n = \mathrm{P}(\mathrm{I}_n),$$

les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65\, v_n + 0,05\, u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

a) Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b) On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85\, u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

5. On donne l'algorithme suivant :

```
W ← 0
N ← 0
Tant que W < 0,99 :
  N ← N + 1
  W ← 1 − 5/4 × 0,85^N + 1/4 × 0,65^N
Fin Pour
Afficher N
```

a) Donner et interpréter le résultat affiché à la fin.

b) Justifier la formule utilisée à la ligne 5.

<u>Exercice 3</u> : **5 points**

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-2\sqrt{3} + 2i)\, z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})\, z + 8i = 0$$

a) Montrer que le nombre $-2i$ est une solution de (E).

b) Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3 + (-2\sqrt{3} + 2i)\, z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})\, z + 8i = (z + 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4)$$

c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

d) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

Dans la suite de l'exercice on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} - i$.

a) Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

b) Placer ces points avec le plus de précision possible. Laisser les traits de construction apparents.

c) On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

3. On rappelle que dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$ sont orthogonaux si et seulement si $x\,x' + y\,y' = 0$.

a) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\,\bar{z}'$ est un imaginaire pur.

b) A l'aide de la question 3.a., démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

Exercice 4 : **5 points**

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x+2)\,e^{x-4} - 2$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

   Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. A l'aide de la calculatrice donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Etude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x^2\,e^{x-4}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -x\,g(x)$ où la fonction g est celle définie en partie A

   Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Les calculs des limites ne sont pas attendus.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$, α étant le réel défini dans la partie A.

Partie C : Etude de la représentation graphique de *f*

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

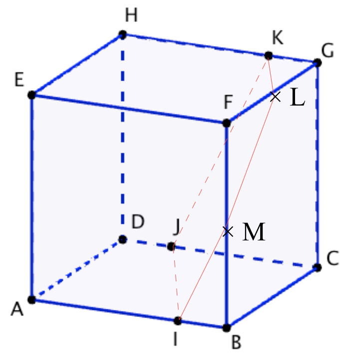
1. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$ ainsi que leur point d'intersection.
2. Montrer qu'en ce point, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$ ont une tangente commune.

<u>**Correction**</u>

<u>Exercice 1</u> :

<u>Partie A</u>

ABCDEFGH est un cube donc les plans (ABCD) et (EFGH) sont strictement parallèles. Ainsi, le plan (IJK) coupe ces deux plans selon des droites parallèles. La parallèle à (IJ) passant par K coupe l'arête [FG] en un point L qui appartient à l'intersection du cube et du plan (IJK). De même, les plans (ABFE) et (DCGH) étant strictement parallèles, on trace la parallèle à (JK) passant par I. Cette droite coupe l'arête [BF] en un point M qui appartient à l'intersection du cube et du plan (IJK). Finalement, cette section est le pentagone IJKLM. L'affirmation 3 était correcte.



<u>Partie B</u>

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

On note d' la droite passant par le point $A(4;4;-6)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(5;2;-9)$.

Si deux droites sont coplanaires alors elles sont soit parallèles, soit sécantes.

Or $\vec{u}(1;-1;1)$ et $\vec{v}(5;2;-9)$ sont des vecteurs directeurs de d et d' et $\frac{5}{1} \neq \frac{2}{-1}$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que d et d' ne sont pas parallèles.

d et d' ont pour représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \qquad d' : \begin{cases} x = 4 + 5t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = -6 - 9t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}$$

$$M(x;y;z) \in d \cap d' \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + t = 4 + 5t' \\ 2 - t = 4 + 2t' \\ 3 + t = -6 - 9t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 5t' = 5 & L_1 \\ -t - 2t' = 2 & L_2 \\ t + 9t' = -9 & L_3 \end{cases}$$

$$M(x;y;z) \in d \cap d' \Leftrightarrow \begin{cases} t - 5t' = 5 & L_1 \\ -7t' = 7 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 14t' = -14 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 5t' = 5 \\ t' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 5 = 5 \\ t' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Le système ayant un couple de solutions uniques, le point M d'intersection de d et d' existe.

Ainsi, les droites d et d' sont sécantes en M. On en déduit qu'elles sont coplanaires.

Partie C

On considère le plan $\mathscr{P}$ et la droite Δ définis par les représentations paramétriques suivantes :

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t' \\ z = t + t' \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R} \qquad \Delta : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -5 + k \\ z = -5 + 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

1. On détermine le point A de paramètre 0 de Δ :

   $$\begin{cases} x = 1 + 2 \times 0 = 1 \\ y = -5 + 0 = -5 \\ z = -5 + 3 \times 0 = -5 \end{cases}$$ Ainsi, A a pour coordonnées $(1\,;-5\,;-5)$.

   On détermine si A appartient à $\mathscr{P}$:

   $$\begin{cases} 1 = 3 + t \\ -5 = -1 + 2t' \\ -5 = t + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - 3 \\ 2t' = 1 - 5 \\ t' = -t - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ 2t' = -4 \\ t' = 2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = -2 \\ t' = -3 \end{cases}$$

   Ce système n'a pas de solution puisque $-3 \neq -2$. On en déduit que A n'appartient pas à $\mathscr{P}$.

2. Soient $B(3\,;-5\,;-3)$ et $C(1\,;-3\,;-4)$ deux points de l'espace.

   Le plan (ABC) passe par $A(1\,;-5\,;-5)$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2\,;0\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;2\,;1)$, non colinéaires. Le plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique :

   $$\mathscr{P} : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t' \\ z = t + t' \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

   Ainsi, le plan $\mathscr{P}$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\,(1\,;0\,;1)$ et $\vec{v}\,(0\,;2\,;1)$, non colinéaires.

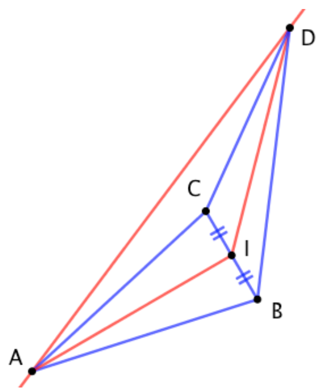
   On remarque que :

   - $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires puisque $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{u}$.
   - $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

   On en déduit que les plans (ABC) et $\mathscr{P}$ sont parallèles.

Partie D

Soit ABC un triangle isocèle en A et I le milieu de [BC]. On considère un point D non situé dans le plan (ABC) et tel que le triangle BCD est isocèle en D.



1. ABC est isocèle en A, BCD est isocèle en D et I est le milieu de [BC]. On en déduit que les points A, I et D sont équidistants de B et de C.

   Or, si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient au plan médiateur de ce segment. Puisque D n'est pas situé dans le plan (ABC), les points A, I et D ne sont pas alignés et ils définissent le plan médiateur de [BC].

   On en déduit que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (AID).

2. La droite (BC) est perpendiculaire au plan (AID).

   Or si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

   On en déduit que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales.

Exercice 2 :

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades tandis que 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :

- S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
- M_n: « l'individu est malade en semaine n » ;
- I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

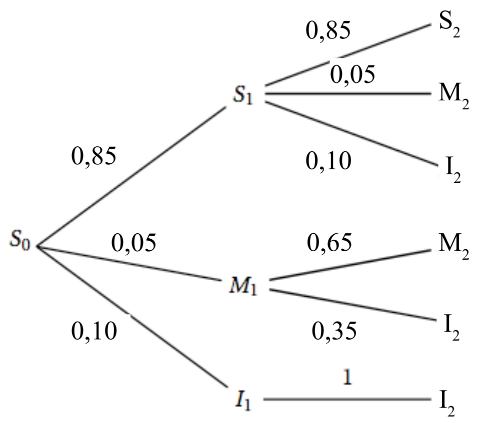
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S ». On a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \text{ ; } P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. $P(I_2) = P(S_1 \cap I_2) + P(M_1 \cap I_2) + P(I_1 \cap I_2)$
$P(I_2) = P(S_1) \times P_{S_1}(I_2) + P(M_1) \times P_{M_1}(I_2) + P(I_1) \times P_{I_1}(I_2)$
$P(I_2) = 0,85 \times 0,1 + 0,05 \times 0,35 + 0,1 \times 1 = 0,2025$

3. $P_{I_2}(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \dfrac{0,05 \times 0,35}{0,2025} \approx 0,086$
Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, la probabilité qu'il ait été malade en semaine 1 est d'environ $0,086$.

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie. Pour tout entier naturel n, on note :

$$u_n = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n),\ v_n = \mathrm{P}(\mathrm{M}_n) \text{ et } w_n = \mathrm{P}(\mathrm{I}_n),$$

les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Quelle que soit la semaine, chaque individu de la population est, à l'exclusion de toute autre possibilité, soit de type S, soit malade, soit immunisé.
   Ainsi : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n + w_n = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n) + \mathrm{P}(\mathrm{M}_n) + \mathrm{P}(\mathrm{I}_n) = 1$

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
…	…	…	…	…
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

   Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

   a) La suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65\, v_n + 0,05\, u_n$.
   Donc, dans la cellule C3, on a saisit la formule : $= 0,65$*C2 $+ 0,05$*B2

   b) La valeur de v_4 est la plus grande donc le pic épidémique prévue par ce modèle est N = 4.

3. a) $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{S}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \cap \mathrm{S}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n) \times \mathrm{P}_{\mathrm{S}_n}(\mathrm{S}_{n+1}) = u_n \times 0,85 = 0,85\, u_n$.
   On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de 1er terme $u_0 = \mathrm{P}(\mathrm{S}_0) = 1$.
   Ainsi : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 0,85^n$

   b) On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$: « $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$ »

   <u>Initialisation</u> : Si $n = 0$

   On a, d'une part : $v_0 = \mathrm{P}(\mathrm{M}_0) = 0$

   Et, d'autre part : $\frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0) = \frac{1}{4}(1-1) = 0$

   Donc $v_0 = \frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0)$ et ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   <u>Hérédité</u> :

   Soit k un entier naturel. $k \geq 0$.

   Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors : $v_k = \frac{1}{4}(0,85^k - 0,65^k)$

   Or : $v_{k+1} = 0,65\, v_k + 0,05\, u_k$ et : $u_k = 0,85^k$

   Donc : $v_{k+1} = 0,65 \times \frac{1}{4}(0,85^k - 0,65^k) + 0,05 \times 0,85^k$

$$v_{k+1} = 0,65 \times \frac{1}{4} \times 0,85^k - \frac{1}{4} \times 0,65^{k+1} + \frac{1}{4} \times 0,20 \times 0,85^k$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{4} \times 0,85^k\,(0,65 + 0,20) - \frac{1}{4} \times 0,65^{k+1}$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{4} \times 0,85^k \times 0,85 - \frac{1}{4} \times 0,65^{k+1}$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{4} \times 0,85^{k+1} - \frac{1}{4} \times 0,65^{k+1} = \frac{1}{4}\,(0,85^{k+1} - 0,65^{k+1})$$

$\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

$\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{4}\,(0,85^n - 0,65^n)$

4. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = 0,85^n \qquad v_n = \dfrac{1}{4}\,(0,85^n - 0,65^n)$
   $0,85 \in\ ]-1\,;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$
   De même, puisque : $0,65 \in\ ]-1\,;1[$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,65^n = 0$
   On en déduit, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n - 0,65^n = 0$ et, par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4}\,(0,85^n - 0,65^n) = 0$
   Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
   Enfin : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n + w_n = 1 \iff w_n = 1 - u_n - v_n$
   On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$
   On peut en déduire que la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit de type S ou malade, dans un grand nombre de semaines, sera nulle; tandis que la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit immunisé sera certaine.

5. On donne l'algorithme suivant :

```
W ← 0
N ← 0
Tant que W < 0,99 :
  N ← N + 1
  W ← 1 − 5/4 × 0,85^N + 1/4 × 0,65^N
Fin Pour
Afficher N
```

a) Le résultat affiché en fin d'exécution de cet algorithme est N = 30.
Cela signifie qu'au bout de 30 semaines, la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit immunisé contre la maladie sera supérieure ou égale à $0,99$.
b) $\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_n = 1 - u_n - v_n$
Or : $u_n = 0,85^n$ et : $v_n = \dfrac{1}{4}\,(0,85^n - 0,65^n)$
Donc : $w_n = 1 - 0,85^n - \dfrac{1}{4}\,(0,85^n - 0,65^n) = 1 - \dfrac{4}{4} \times 0,85^n - \dfrac{1}{4} \times 0,85^n + \dfrac{1}{4} \times 0,65^n$

$$w_n = 1 - (\frac{4}{4} + \frac{1}{4})\,0,85^n + \frac{1}{4} \times 0,65^n = 1 - \frac{5}{4} \times 0,85^n + \frac{1}{4} \times 0,65^n$$

Ce qui justifie la formule utilisée à la ligne 5.

Exercice 3 :

1.

a) $A = (-2i)^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2i\right) \times (-2i)^2 + \left(4 - 4i\sqrt{3}\right) \times (-2i) + 8i$

$A = 8i + \left(-2\sqrt{3} + 2i\right) \times (-4) + \left(4 - 4i\sqrt{3}\right) \times (-2i) + 8i$

$A = 8i + 8\sqrt{3} - 8i - 8i - 8\sqrt{3} + 8i$

$A = 0$

Donc le nombre $-2i$ est solution de (E)

b) $\forall z \in \mathbb{C}\ :\ (z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = z^3 - 2\sqrt{3}z^2 + 4z + 2iz^2 - 4\sqrt{3}iz + 8i$

$(z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2i\right)z^2 + \left(4 - 4i\sqrt{3}\right)z + 8i$

c) Résolution de (E): $(\mathrm{z} + 2\mathrm{i})\left(\mathrm{z}^2 - 2\sqrt{3}\mathrm{z} + 4\right) = 0$

Or un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul

- $z + 2i = 0 \ \Leftrightarrow z = -2i$
- $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ $\qquad \Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -4 < 0$

  L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

  $z_1 = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \ \overline{z_1} = \ \sqrt{3} + i$

  <u>Conclusion</u> : $S = \{-2i; \sqrt{3} - i;\ \sqrt{3} + i\}$

d)

- $|-2i| = 2\ \ et \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ (imaginaire pur avec $Im(z) < 0$) donc $-2i = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$
- $\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

  $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\ e^{-\frac{i\pi}{6}}$
- $\sqrt{3} + i = \overline{\sqrt{3} - i} = 2\ e^{\frac{i\pi}{6}}$

2.

a) $OA = |-2i| = 2$; $OB = \left|\sqrt{3} + i\right| = 2$ et $OC = \left|\sqrt{3} - i\right| = 2$ (d'après 1.d))

Ainsi $OA = OB = OC$ donc les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b) Voir figure.

c) *Affixe du point D milieu du segment [OB]* : $z_D = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$AODL$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AL}$.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AL} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OD}} = z_{\overrightarrow{AL}} \Leftrightarrow z_D - z_O = z_L - z_A \Leftrightarrow z_L = z_D - z_O + z_A$

Donc $z_L = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - 0 - 2i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

3.

a) D'après le rappel : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$ (*Produit scalaire*)

$z\,\overline{z'} = (x + iy) \times \left(\overline{x' + iy'}\right) = (x + iy)(x' - iy') = xx' - iy'x + iyx' + yy'$

$z\,\overline{z'} = xx' + yy' + i(yx' - y'x)$

$z\,\overline{z'}$ est imaginaire pur si et seulement si $Re\left(z\,\overline{z'}\right) = 0$ c'est-à-dire : $xx' + yy' = 0$

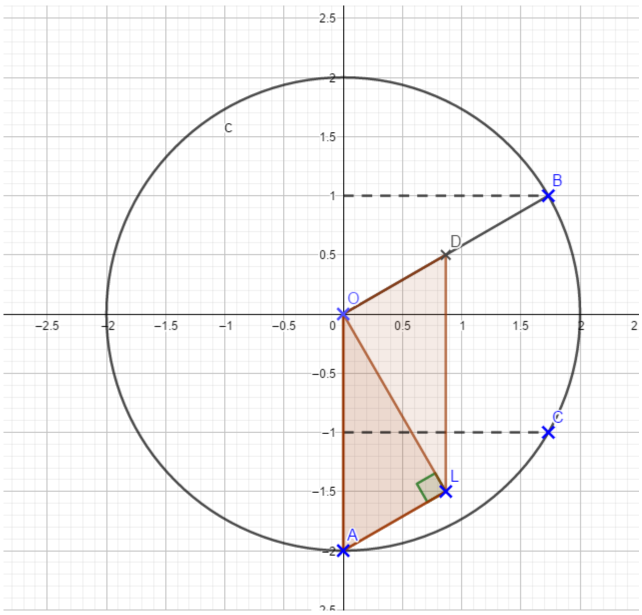
<u>Conclusion</u> : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\,\overline{z'}$ est imaginaire pur

b) Le triangle AOL est rectangle en L si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{LA}$ et $\overrightarrow{LO}$ sont orthogonaux.

Or $z_{\overrightarrow{LA}} = z_A - z_L = -2i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $\quad$ et $\quad z_{\overrightarrow{LO}} = z_L = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

$$z\,\overline{z'} = z_{\overrightarrow{LA}} \times \overline{z_{\overrightarrow{LO}}} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}i}{4} - \frac{\sqrt{3}i}{4} + \frac{3}{4} = -4\frac{\sqrt{3}i}{4} = -i\sqrt{3}\ \in i\mathbb{R}$$

Ainsi $z\,\overline{z'}$ est un imaginaire pur donc d'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{LA}$ et $\overrightarrow{LO}$ sont orthogonaux. Donc le triangle AOL est rectangle en L.



Exercice 4 :

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

$$g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2$$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ donc par <u>composition</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-4} = +\infty$

   Puis par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)e^{x-4} = +\infty$

   Et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2. $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2 = xe^{x-4} + 2e^{x-4} - 2 = xe^{x}e^{-4} + 2e^{x-4} - 2$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ (Croissance comparée) donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x}e^{-4} = 0$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 4 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x-4} = 0$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} -2 = -2$

   Donc par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$

3. On note : $\begin{cases} u(x) = x+2 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{x-4} & v'(x) = e^{x-4} \end{cases}$

   $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^{x-4} + (x+2)e^{x-4} = e^{x-4}(1+x+2) = e^{x-4}(x+3)$

   $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $e^{x-4} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x+3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	-2	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3$

$g(-3) = (-3+2)e^{-3-4} - 2 = -e^{-7} - 2$

$g(-3) \approx -2{,}001$

4. g est une fonction dérivable donc continue sur $]-3;+\infty[$ et strictement croissante sur cet intervalle.
   De plus, $g(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
   Donc d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-3;+\infty[$.

   D'autre part, la fonction g est continue, strictement décroissante et strictement négative sur $]-\infty;-3]$, donc l' équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $]-\infty;-3]$.

   <u>Conclusion</u> : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

5.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

6. Par pas de 1 : $3 < \alpha < 4$ car $f(3) < 0 < f(4)$
   Par pas de 10^{-1} : $3 < \alpha < 3{,}1$ car $f(3) < 0 < f(3{,}1)$
   Par pas de 10^{-2} : $3{,}06 < \alpha < 3{,}07$ car $f(3{,}06) < 0 < f(3{,}07)$
   Par pas de 10^{-3} : $3{,}069 < \alpha < 3{,}070$ car $f(3{,}069) < 0 < f(3{,}070)$

Partie B : Etude de la fonction *f*

$$f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$$

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x^2e^{x-4} = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - e^{x-4}) = 0$
   Or un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :
   - $x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$
   - $1 - e^{x-4} = 0 \Leftrightarrow e^{x-4} = 1 \Leftrightarrow e^{x-4} = e^0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

   Conclusion : $S = \{0; 4\}$

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ : f'(x) = -xg(x)$ (Admis)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Signe de g : voir partie A Qu 5.

$f(0) = 0$

$f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2e^{\alpha-4}$

3. f' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ donc f admet une maximum local atteint en α.
   Ce maximum vaut : $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2e^{\alpha-4}$.
   Or par définition : $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire : $(\alpha + 2)e^{\alpha-4} - 2 = 0$ donc $e^{\alpha-4} = \frac{2}{\alpha+2}$
   Donc $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 \times \frac{2}{\alpha+2} = \frac{\alpha^2(\alpha+2)-2\alpha^2}{\alpha+2} = \frac{\alpha^3+2\alpha^2-2\alpha^2}{\alpha+2} = \frac{\alpha^3}{\alpha+2}$

Partie C : Etude de la représentation graphique de *f*

1. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) - y = x^2 - x^2e^{x-4} - x^2 = -x^2e^{x-4}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $-x^2$		$-$	0	$-$	
Signe de e^{x-4}			$+$		
Signe de $f(x) - y$		$-$	0	$-$	

$-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in \mathbb{R} : e^{x-4} > 0$

Conclusion :
   - Pour $x = 0$: $f(x) - y = 0$ donc C_f et $\mathcal{P}$ sont sécantes au point d'abscisse $x = 0$.
     Le point d'intersection de C_f et $\mathcal{P}$ est donc le point de coordonnées $(0; 0)$.
   - $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[: f(x) - y < 0$
     Donc C_f est en dessous de $\mathcal{P}$ sur $]-\infty\,; 0[$ et sur $]0\,; +\infty[$

2. Tangente à C_f au point d'abscisse 0 :
   $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = -0g(0) = 0$
   $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 0$

   Tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse 0 :
   On note $k(x) = x^2$; $k'(x) = 2x$
   On a $k(0) = 0$ *et* $k'(x) = 2 \times 0 = 0$
   Donc $y = k'(0)(x - 0) + k(0) = 0$

   Conclusion : les courbes C_f et $\mathcal{P}$ ont une tangente commune au point d'abscisse $x = 0$.