Baccalauréat Général Blanc

Epreuve d'enseignement de spécialité

Session 2023

Mathématiques

Lundi 23 janvier 2023

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage d'une calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage d'une calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

<u>Exercice 1</u> : **5 points**

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

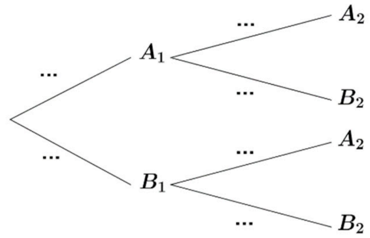
- si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- si un vélo se trouve au point B un matin, la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B. On considère un vélo de la société pris au hasard. Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin » ;
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note respectivement a_n et b_n les probabilités des événements A_n et B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

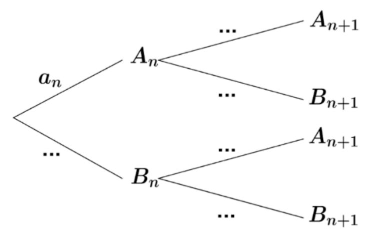
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui modélise la situation pour les deux premiers matins.



2. a) Calculer a_2.

   b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. a) Recopier et compléter l'arbre pondéré qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul on a : $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul on a : $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 : **5 points**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près.
4. Donner le tableau de signe de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

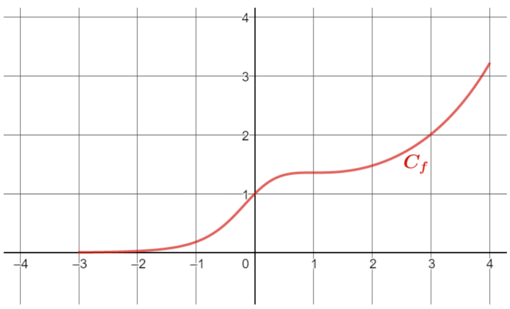
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

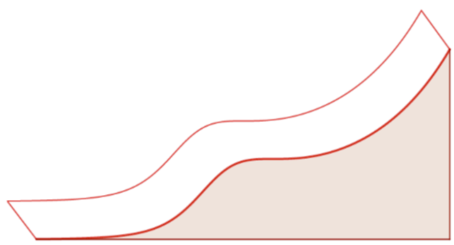
On note $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

   b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Des concepteurs de toboggans hésitent à utiliser la courbe $\mathscr{C}f$ comme profil du dernier modèle qu'ils développent. Ils estiment que celui-ci n'assurera de bonnes sensations que si son profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe C_f



Vue de profil du toboggan

On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, est définie pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par : $f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$ où p est la fonction définie dans la **Partie A**.

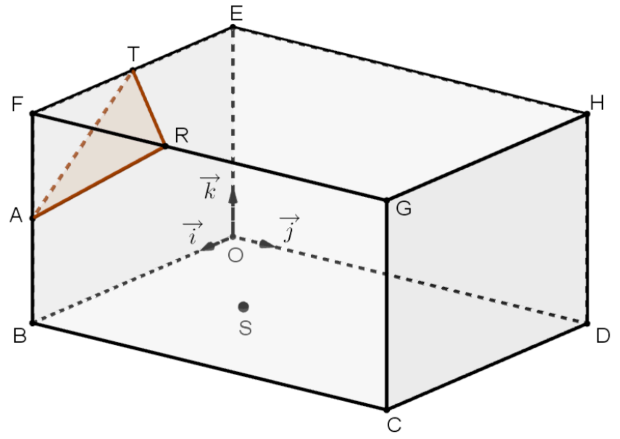
En utilisant l'expression précédente de f'', lever l'hésitation des concepteurs du nouveau toboggan.

Propriété / Vocabulaire

La courbe représentative d'une fonction f admet **un point d'inflexion**, noté I, si et seulement si sa dérivée seconde s'annule et change de signe en x_I.

Exercice 3 : **5 points**

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m. Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m. On utilise le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère, on a, en particulier :

$C(6 ; 8 ; 0)$, $F(6 ; 0 ; 4)$ et $G(6 ; 8 ; 4)$

Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets :

$A(6 ; 0 ; 2)$, $R(6 ; 3 ; 4)$ et $T(3 ; 0 ; 4)$

Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$.

1. a) Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

   b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$

   c) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

2. a) Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

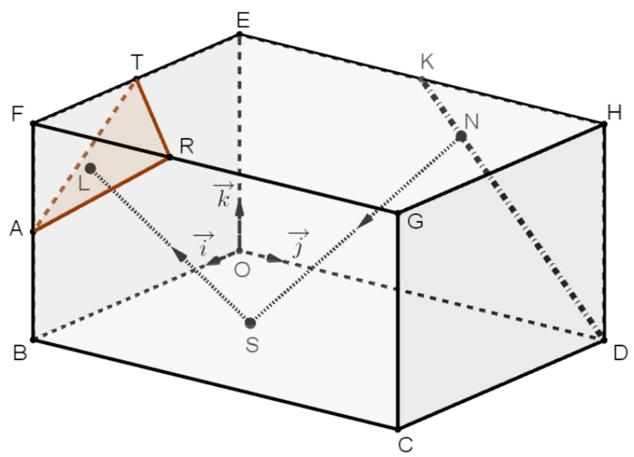
   a) Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.

   Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \\ z = 3k \end{cases}$$

   b) Soit L le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (ART).
   Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] où K est le milieu du segment [EH].
   Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N et il oriente ce 2[nd] rayon laser vers S.



a) Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$, le point N de coordonnées $(0 ; 8 - 4t ; 4t)$ est un point du segment [DK].

b) Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

Exercice 4 : **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) qui comprend cinq questions indépendantes. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Les cinq questions sont indépendantes.

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

   a) $x = -1$ b) $y = -1$ c) $y = -2$ d) $y = -3$

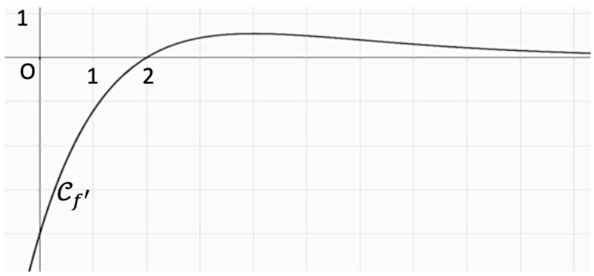
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{x^2}$.

   La primitive F de f, sur $\mathbb{R}$, qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

   a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\,e^{x^2}$ b) $F(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{x^2}$

   c) $F(x) = (1 + 2x^2)\,e^{x^2}$ d) $F(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{x^2} + \dfrac{1}{2}$

3. On donne ci-dessous la représentation graphique **de la fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On peut affirmer que la fonction f est :



   a) concave sur $[\,0\,;\,2\,]$

   b) concave sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$

   c) convexe sur $[\,0\,;\,4\,]$

   d) convexe sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$

Définition / Vocabulaire

Une fonction f est **convexe** (resp. **concave**) sur un intervalle I lorsque sa dérivée 2nde est positive (resp. négative) sur I.

4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\,e^{-x^2} + 2$:

   a) toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$ c) toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$

   c) certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes d) toutes sont croissantes sur $]-\infty\,;\,0\,]$ et décroissantes sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

5. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

   a) trois solutions b) deux solutions c) 1 solution d) 0 solution

Correction du bac blanc du 23 janvier 2023 (J1)

Exercice 1 :

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.
La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.
On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.
D'après une étude statistique :

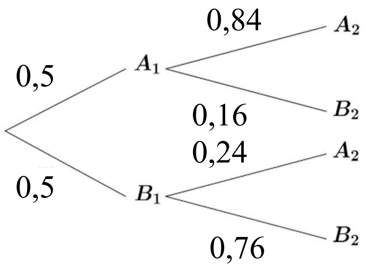
- si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- si un vélo se trouve au point B un matin, la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B. On considère un vélo de la société pris au hasard. Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin » ;
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note respectivement a_n et b_n les probabilités des événements A_n et B_n.
Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui modélise la situation pour les deux premiers matins.



2. a) Calculer a_2.

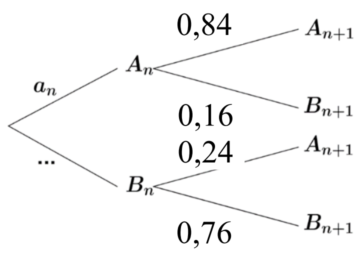
$a_2 = P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2)$
$a_2 = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2)$
$a_2 = 0,5 \times 0,84 + 0,5 \times 0,24 = 0,5 \times 1,08 = 0,54$

b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,5 \times 0,24}{0,54} = \frac{0,12}{0,54} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9} \approx 0,222$$

Ainsi, sachant que le vélo se trouvait au point A le 2nd matin, la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le 1er matin est d'environ 0,222.

3. a) Recopier et compléter l'arbre pondéré qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul on a : $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$

$a_{n+1} = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$

$a_{n+1} = a_n \times 0,84 + b_n \times 0,24$

$a_{n+1} = 0,84\, a_n + 0,24\,(1 - a_n)$

$a_{n+1} = 0,84\, a_n + 0,24 - 0,24a_n$

$a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul on a : $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$

On note, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ »

- Initialisation

D'une part, on a $a_1 = 0,5$

D'autre part, on a $0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^0 = 0,6 - 0,1 \times 1 = 0,6 - 0,1 = 0,5$

Donc $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1}$ et ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité

Soit k un entier naturel non nul. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Alors $a_k = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{k-1}$

Or, on a montré à la question précédente que $a_{k+1} = 0,6a_k + 0,24$

On en déduit $a_{k+1} = 0,6\,(0,6 - 0,1 \times 0,6^{k-1}) + 0,24$

$a_{k+1} = 0,36 - 0,1 \times 0,6^k + 0,24$

$a_{k+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^k$

$a_{k+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(k+1)-1}$

Ainsi, $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion

$\mathscr{P}(1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire. On en conclut que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} = 0,6 - 0,1 \times \dfrac{0,6^n}{0,6} = 0,6 - \dfrac{0,1}{0,6} \times 0,6^n = 0,6 - \dfrac{1}{6} \times 0,6^n$

$0,6 \in]$-1 ; 1$[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$

On en déduit, par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{6} \times 0,6^n = 0$ puis, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6 - \dfrac{1}{6} \times 0,6^n = 0,6$

Ainsi, la suite (a_n) converge vers $0,6$.

On en déduit que, dans un très grand nombre de jours, 60 % des vélos seront disponibles le matin au point A.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

La calculatrice permet de déterminer que $a_n \geq 0,599 \Leftrightarrow n \geq 11$.

Ainsi, la probabilité qu'un vélo donné soit présent au point A sera supérieure ou égale à $0,599$ le $11^{\text{ème}}$ jour.

2ème méthode (algébrique : recommandée le jour J) :

$a_n \geq 0,599 \;\Leftrightarrow\; 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geq 0,599 \;\Leftrightarrow\; -0,1 \times 0,6^{n-1} \geq -0,001 \;\Leftrightarrow\; 0,6^{n-1} \leq \dfrac{0,001}{0,01}$

$a_n \geq 0,599 \;\Leftrightarrow\; 0,6^{n-1} \leq 0,01 \;\Leftrightarrow\; ln(0,6^{n-1}) \leq ln(0,01) \;\Leftrightarrow\; (n-1)ln(0,6) \leq ln(0,01)$

Or $0 < 0,6 < 1$. On en déduit $ln(0,6) < 0$ et, par conséquent : $a_n \geq 0,599 \;\Leftrightarrow\; n - 1 \geq \dfrac{ln(0,01)}{ln(0,6)}$

$a_n \geq 0,599 \;\Leftrightarrow\; n \geq \dfrac{ln(0,01)}{ln(0,6)} + 1$. Or $\dfrac{ln(0,01)}{ln(0,6)} + 1 \approx 10,02$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \geq 11$

Exercice 2 :

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$

On en déduit que p' n'admet aucune racine et que $p'(x)$ est du signe de $a = 3 > 0$ sur $[-3\,;\,4]$.

Ainsi, la fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$

2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

La fonction p est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$. De plus :

- $p(-3) = (-3)^3 - 3 \times (-3)^2 + 5 \times (-3) + 1 = -27 - 27 - 15 + 1 = -68 < 0$
- $p(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 + 5 \times 4 + 1 = 64 - 48 + 20 + 1 = 37 > 0$

Donc p change de signe sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près.

La calculatrice permet de déterminer $\alpha \approx -0,18$

4. Donner le tableau de signe de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

La fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$. De plus, elle s'annule en $\alpha \approx -0,18$.

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

On note $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + x^2$

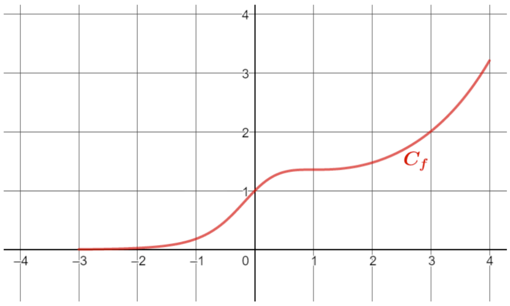
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x(1+x^2) - 2x\,e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1)\,e^x}{(1+x^2)^2}$$

b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

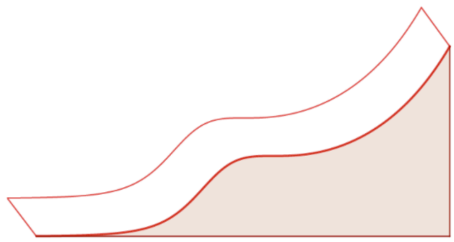
$$f'(1) = \frac{(1^2 - 2 + 1)\,e}{(1+1^2)^2} = \frac{0\,e}{4} = 0$$

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 1. Ce coefficient directeur étant nul, on en déduit que cette tangente est horizontale.

2. Des concepteurs de toboggans hésitent à utiliser la courbe $\mathscr{C}f$ comme profil du dernier modèle qu'ils développent. Ils estiment que celui-ci n'assurera de bonnes sensations que si son profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe C_f



Vue de profil du toboggan

On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, est définie pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par : $f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$ où p est la fonction définie dans la **Partie A**.

En utilisant l'expression précédente de f'', lever l'hésitation des concepteurs du nouveau toboggan.

$\forall\, x \in [-3\,;\,4],\ f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

Les concepteurs du toboggan estiment que celui-ci n'assurera de bonnes sensations que si son profil possède au moins deux points d'inflexion. Or, $\mathscr{C}f$ admet un point d'inflexion en I si et seulement si sa dérivée 2nde s'annule et change de signe en x_I. Déterminons les racines de $f''(x)$:

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (1+x^2)^3 \neq 0$ et $p(x)(x-1)e^x = 0$

$\forall\, x \in [-3\,;\,4],\ x^2 \neq -1$ donc $1+x^2 \neq 0$ donc $(1+x^2)^3 \neq 0$

De plus, un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Donc $p(x)(x-1)e^x = 0 \;\Leftrightarrow\; p(x) = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $e^x = 0$

L'équation $e^x = 0$ n'admet aucune solution car $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$

Donc $p(x)(x-1)e^x = 0 \;\Leftrightarrow\; p(x) = 0$ ou $x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \alpha$ ou $x = 1$

Etude du signe de $f''(x)$:

- $\forall\, x \in [-3\,;\,4],\ 1 + x^2 > 0$ donc $(1+x^2)^3 > 0$
- $\forall\, x \in [-3\,;\,4],\ e^x > 0$
- $x - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1$
- Le signe de $p(x)$ a déjà été étudié : $\forall\, x \in [-3\,;\,\alpha[,\ p(x) < 0$ et $\forall\, x \in]\alpha\,;\,4],\ p(x) > 0$ avec $\alpha \approx -0,18$

On en déduit le tableau de signes de $f''(x)$:

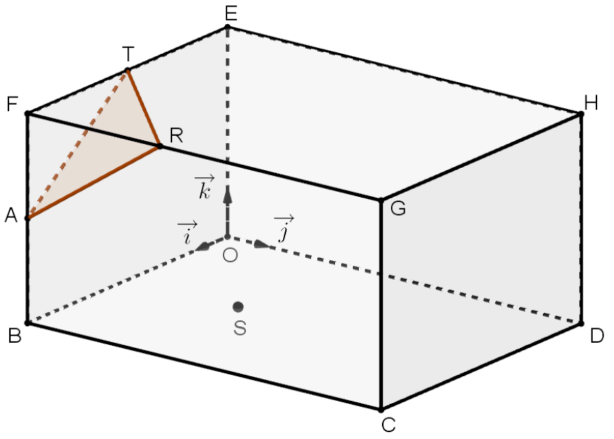
x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$(1+x^2)^3$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f'' s'annule et change de signe en α et en 1 donc $\mathscr{C}f$ admet deux points d'inflexion : les points d'abscisses α et 1

Ainsi, le profil du toboggan admet deux points d'inflexion et les concepteurs peuvent utiliser la courbe $\mathscr{C}f$.

Exercice 3 :

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m. Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m. On utilise le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier :

$C(6; 8; 0)$, $F(6; 0; 4)$ et $G(6; 8; 4)$

Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets :

$A(6; 0; 2)$, $R(6; 3; 4)$ et $T(3; 0; 4)$

Enfin, S est le point de coordonnées $(3; \frac{5}{2}; 0)$.

1. a) Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

$\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} x_R - x_A \\ y_R - y_A \\ z_R - z_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} 6-6 \\ 3-0 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Donc AR = $\|\overrightarrow{AR}\| = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

De même, $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-0 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Donc AT = $\sqrt{(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Ainsi, AT = AR = $\sqrt{13}$. On en déduit que le triangle ART est isocèle en A.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$

On a : $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et : $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 4$

c) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

D'une part, on sait que : $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 4$

D'autre part, $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = AR \times AT \times \cos\widehat{RAT}$

On en déduit : $AR \times AT \times \cos\widehat{RAT} = 4 \Leftrightarrow \cos\widehat{RAT} = \frac{4}{AR \times AT} = \frac{4}{\sqrt{13}^2} = \frac{4}{13}$

La calculatrice permet de déterminer $\widehat{RAT} \approx 72,1°$

2. a) Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).

Le plan (ART) est dirigé par le couple de vecteurs $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires puisque $\frac{0}{-3} \neq \frac{2}{2}$. On montre que $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à chacun d'eux :

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 2 \times 0 - 2 \times 3 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$ $\quad$ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = 2 \times (-3) - 2 \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$

Ce qui prouve que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ART)

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART). Ce plan passe par A (6 ; 0 ; 2).

M (x ; y ; z) ∈ (ART) ⇔ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-6 \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix}$

$$2(x-6)-2y+3(z-2)=0$$
$$2x-12-2y+3z-6=0$$
$$2x-2y+3z-18=0$$

3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

a) Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.

Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\begin{cases} x = 3+2k \\ y = \dfrac{5}{2}-2k \quad \text{où k} \in \mathbb{R} \\ z = 3k \end{cases}$$

Δ est la droite orthogonale au plan (ART) qui passe par S (3 ; $\dfrac{5}{2}$; 0).

$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ étant un vecteur normal au plan (ART), $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de Δ.

On en déduit une représentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x = 3+2k \\ y = \dfrac{5}{2}-2k \\ z = 0+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+2k \\ y = \dfrac{5}{2}-2k \quad \text{où k} \in \mathbb{R} \\ z = 3k \end{cases}$

b) Soit L le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (ART).

Démontrer que L a pour coordonnées (5 ; $\dfrac{1}{2}$; 3).

Soit L (x ; y ; z) le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (ART).
Les coordonnées de L vérifient à la fois l'équation cartésienne du plan (ART) :

$$2x-2y+3z-18=0$$

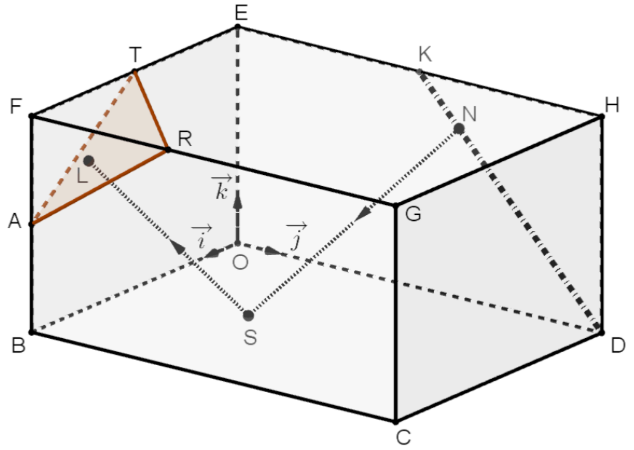
et la représentation paramétrique de Δ précédemment obtenue : $\begin{cases} x = 3+2k \\ y = \dfrac{5}{2}-2k \quad \text{où k} \in \mathbb{R} \\ z = 3k \end{cases}$

On détermine le paramètre k associé au point L :

$$2(3+2k)-2(\frac{5}{2}-2k)+3\times 3k-18=0$$
$$6+4k-5+4k+9k-18=0$$
$$17k=17$$
$$k=1$$

On en déduit les coordonnées de L : $\begin{cases} x = 3+2\times 1 = 5 \\ y = \dfrac{5}{2}-2\times 1 = \dfrac{1}{2}. \\ z = 3\times 1 = 3 \end{cases}$ Ainsi, L (5 ; $\dfrac{1}{2}$; 3)

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] où K est le milieu du segment [EH].
Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N et il oriente ce 2nd rayon laser vers S.



a) Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$, le point $N(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$ est un point de [DK].

K est le milieu de [EH] donc $K\left(\frac{x_E+x_H}{2}\,;\,\frac{y_E+y_H}{2}\,;\,\frac{z_E+z_H}{2}\right)$ $K\left(\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{0+8}{2}\,;\,\frac{4+4}{2}\right)$ $K(0\,;\,4\,;\,4)$

Par ailleurs, on a $D(0\,;\,8\,;\,0)$ et on pose $N(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$

On en déduit les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{KN}\begin{pmatrix} x_N - x_K \\ y_N - y_K \\ z_N - z_K \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KN}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 8-4t-4 \\ 4t-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KN}\begin{pmatrix} 0-0 \\ -4t+4 \\ 4t-4 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{KD}\begin{pmatrix} x_D - x_K \\ y_D - y_K \\ z_D - z_K \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KD}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 8-4 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KD}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

On remarque que $x_{\overrightarrow{KN}} = x_{\overrightarrow{KD}} = 0$ et que $\frac{y_{\overrightarrow{KN}}}{y_{\overrightarrow{KD}}} = \frac{z_{\overrightarrow{KN}}}{z_{\overrightarrow{KD}}} = \frac{4t-4}{4} = t-1$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont colinéaires.

Ce qui prouve que $N(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$ appartient à la droite (KD).

N appartient au segment [KD] si et seulement si sa 3ème coordonnée (sa cote) est comprise entre 0 et 4.

Or : $0 \leq 4t \leq 4 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq t \leq 1$

Ainsi, $\forall\, t \in [0\,;\,1]$, $N(0\,;\,8-4t\,;\,4t) \in$ [DK].

b) Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

$S\left(3\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$ $\quad L\left(5\,;\,\frac{1}{2}\,;\,3\right)$ $\quad N(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$

$\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix} x_L - x_S \\ y_L - y_S \\ z_L - z_S \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 0,5-2,5 \\ 3-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix} x_N - x_S \\ y_N - y_S \\ z_N - z_S \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 8-4t-2,5 \\ 4t-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix} -3 \\ 5,5-4t \\ 4t \end{pmatrix}$

Les deux rayons laser sont perpendiculaires si et seulement si :

$\overrightarrow{SL}\,.\,\overrightarrow{SN} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2(-3) - 2(5,5-4t) + 3(4t) = 0 \;\Leftrightarrow\; -6 - 11 + 8t + 12t = 0 \;\Leftrightarrow\; 20t = 17 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{17}{20}$

On en déduit : $N\left(0\,;\,8 - 4\times\frac{17}{20}\,;\,4\times\frac{17}{20}\right)$ $N\left(0\,;\,\frac{40}{5}-\frac{17}{5}\,;\,\frac{17}{5}\right)$ $N\left(0\,;\,\frac{23}{5}\,;\,\frac{17}{5}\right)$ $N(0\,;\,4,6\,;\,3,4)$

<u>Exercice 4</u> :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) qui comprend cinq questions indépendantes. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Les cinq questions sont indépendantes.

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

   a) $x = -1$ b) $y = -1$ $\boxed{\text{c) } y = -2}$ d) $y = -3$

   <u>Indication</u> : On détermine la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers +/- ∞

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{x^2}$.

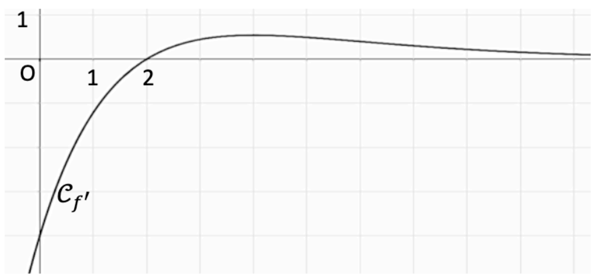
   La primitive F de f, sur $\mathbb{R}$, qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

   a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\,e^{x^2}$ b) $F(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{x^2}$

   c) $F(x) = (1 + 2x^2)\,e^{x^2}$ $\boxed{\text{d) } F(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{x^2} + \dfrac{1}{2}}$

   <u>Indication</u> : On dérive les primitives chacune à leur tour, jusqu'à identifier deux possibilités d'obtenir l'expression de $f(x)$. Entre les réponses b) et d) on choisit la seule telle que $F(0) = 1$.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique **de la fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On peut affirmer que la fonction f est :



   a) concave sur $[\,0\,;\,2\,]$

   b) concave sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$

   $\boxed{\text{c) convexe sur } [\,0\,;\,4\,]}$

   d) convexe sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$

   <u>Indication</u> : Par observation du graphique on conjecture le tableau de variations de f'. On en déduit le signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f'		$\nearrow$		$\searrow$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Définition / Vocabulaire

Une fonction f est **convexe** (resp. **concave**) sur un intervalle I lorsque sa dérivée 2nde est positive (resp. négative) sur I.

4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\,e^{-x^2} + 2$:

$\boxed{\text{a) toutes sont croissantes sur } \mathbb{R}}$

c) toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$

c) certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes

d) toutes sont croissantes sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissantes sur $[0\,;\,+\infty[$.

Indication : f est la dérivée de F. Le signe de $f(x)$ donne les variations des primitives F.

5. L'équation $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a) trois solutions

b) deux solutions

$\boxed{\text{c) 1 solution}}$

d) 0 solution

Indication : Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} + e^{x} - 12$ pour constater que le corollaire du TVI s'applique sur un seul intervalle.