Baccalauréat Général Blanc

Epreuve d'enseignement de spécialité

Session 2023

Mathématiques

Mardi 24 janvier 2023

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage d'une calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage d'une calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

<u>Exercice 1</u> : **5 points**

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97 .

La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,01465.
On note A l'événement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. a) Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.

   b) En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir à 10^{-3} près.
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est pas présenté est 0,005.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active. Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 0,01.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On note S l'événement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0{,}00525$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés. Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près .

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0, 07.

Exercice 2 : **5 points**

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle. Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année. On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 100$.
2. Calculer u_1 puis u_2.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1\,000 < u_{n+1} \leq u_n$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 1\,000(1 + 0,9^n)$

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n). En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec S > 1000).

   a) Dans le programme Python ci-dessous, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population. Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

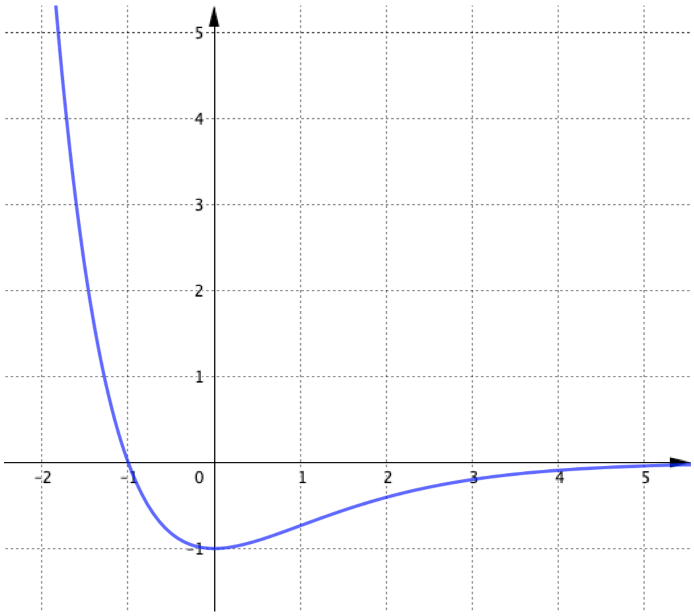
```
def population(S):
    n=0
    u=2000

    while ..........:
        u=...
        n=...
    return ...
```

   b) Que faut-il taper dans la console Python pour déterminer au bout de combien d'année on pourra estimer que la population aura atteint sa limite ? Donner le résultat obtenu.

<u>Exercice 3</u> : **5 points**

Partie A



On donne ci-contre, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Définition / Vocabulaire

Une fonction f est :

- **convexe** sur un intervalle I lorsque sa dérivée 2^{nde} est positive sur I.
- **concave** sur un intervalle I lorsque sa dérivée 2^{nde} est négative sur I.

Etudier la convexité d'une fonction c'est déterminer sur quel intervalle elle est convexe / concave.

Partie B

On admet que la fonction f mentionnée dans la **Partie A** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\,e^{-x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note respectivement f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

   On admettra, sans le justifier, que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = (-x-1)\,e^{-x}$

   b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variations.

   c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

Exercice 4 : **5 points**

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a DC = 6, DA = DH = 4.

Soit les points I, J et K tels que :

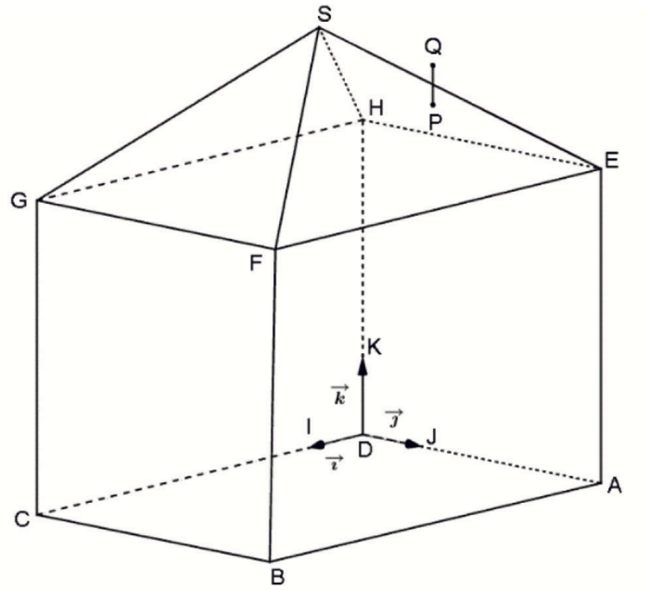
$$\overrightarrow{\mathrm{DI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \;\; ; \;\; \overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DA}} \;\; ; \;\; \overrightarrow{\mathrm{DK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DH}}$$

On note :

$$\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{DI}} \;\; ; \;\; \vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{DJ}} \;\; ; \;\; \vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{DK}}$$

On se place dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

On admet que le point S a pour coordonnées (3 ; 2 ; 6).



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.
2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

   On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ et h désignent respectivement l'aire de la base et la hauteur du tétraèdre.
3. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (0 ; 1 ; 1) est normal au plan (EFS).

   b) En déduire que $y + z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (EFS).
4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :
   - le point P appartient au plan (EFS) ;
   - le point Q a pour coordonnées (2 ; 3 ; $5,5$) ;
   - la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

   a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases} \quad \text{où t} \in \mathbb{R}$$

   b) En déduire les coordonnées du point P.

   c) En déduire la longueur PQ de l'antenne.
5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 + 6k \\ y = 7 - 4k \\ z = 2 + 4k \end{cases} \quad \text{où k} \in \mathbb{R}$$

   L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

Correction du bac blanc du 24 janvier 2023 (J2)

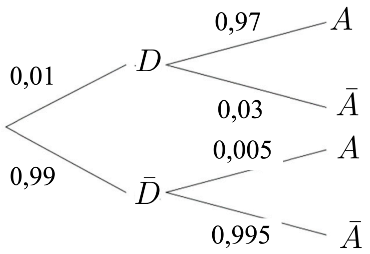
Exercice 1 :

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97 .

La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,01465.
On note A l'événement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.



2. a) Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.

$P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,01 \times 0,97 = 0,0097$
Ainsi, la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active vaut $0,0097$

b) En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir à 10^{-3} près.

$P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,0097}{0,01465} \approx 0,662$
Ainsi, la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active vaut environ $0,662$.

3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est pas présenté est 0,005.

$$P(A) = P(D \cap A) + P(\bar{D} \cap A) \Leftrightarrow 0,01465 = 0,0097 + P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(A)$$
$$0,99 \times P_{\bar{D}}(A) = 0,01465 - 0,0097$$
$$0,99 \times P_{\bar{D}}(A) = 0,00495$$
$$P_{\bar{D}}(A) = \frac{0,00495}{0,99} = 0,005$$
Ainsi, la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est pas présenté est $0,005$.

4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active. Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 0,01.

On note p la probabilité qu'une alarme ne fonctionne pas correctement.
$p = P(D \cap \bar{A}) + P(\bar{D} \cap A)$
$p = P(D) \times P_D(\bar{A}) + P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(A)$
$p = 0,01 \times 0,03 + 0,99 \times 0,005 = 0,00525 < 0,01$
Ainsi, la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas correctement est inférieure à $0,01$.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On note S l'événement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,00525$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés. Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près .

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 prélevés donc X ne peut prendre que des valeurs entières entre 0 et 1.
Prélever un système d'alarme et tester s'il fonctionne normalement ou pas est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que deux issues possibles. On reproduit cette même épreuve 5 fois, dans des conditions d'indépendance, et on obtient un schéma de Bernoulli. Chaque fois, la probabilité que le système d'alarme testé ne fonctionne pas normalement est égale à $0,00525$. Ainsi X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5\,;\,0,00525)$.

2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

$P(X=1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times 0,00525^1 \times 0,99475^4 \approx 0,0257$
La probabilité que sur les 5 prélevés un seul système ne fonctionne pas normalement vaut environ $0,0257$

3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 0,0260$
La probabilité que sur les 5 systèmes prélevés au moins un ne fonctionne pas normalement vaut environ $0,0260$.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0, 07.

On reprend l'expérience décrite dans la partie précédente en prélevant, dans les mêmes conditions d'indépendance, n lots plutôt que 5. On admet que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,00525)$.
Dans ce cas, $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0,00525^0 \times 0,99475^n = 1 - 0,99475^n$
On résout $1 - 0,99475^n > 0,07$

$1 - 0,07 > 0,99475^n$

$0,99475^n < 0,93$

$ln(0,99475^n) < ln(0,93)$

$n\,ln(0,99475) < ln(0,93)$

$0,99475 \in]\,0\,;\,1\,[$ donc $ln(0,99475) < 0$. Ainsi : $n > \dfrac{ln(0,93)}{ln(0,99475)}$
Or $\dfrac{ln(0,93)}{ln(0,99475)} \approx 13,8$ et $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 14$
Il faudrait prélever au moins 14 systèmes d'alarmes pour que la probabilité qu'au moins un ne fonctionne pas normalement soit supérieure à $0,07$.

Exercice 2 :

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle. Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année. On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte $2\,000$ individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 100$.

On note, pour tout entier nature n, u_n l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.
D'une année à l'autre, cette population diminue de 10 % et on réintroduit 100 individus.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \dfrac{10}{100}\,u_n + 100 = u_n - 0,1\,u_n + 100 = 0,9\,u_n + 100$

2. Calculer u_1 puis u_2.

$u_1 = 0,9\,u_0 + 100 = 0,9 \times 2\,000 + 100 = 1\,800 + 100 = 1\,900$
$u_2 = 0,9\,u_2 + 100 = 0,9 \times 1\,900 + 100 = 1\,710 + 100 = 1\,810$

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1\,000 < u_{n+1} \leq u_n$.

On note, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$: « $1\,000 < u_{n+1} \leq u_n$ »

- <u>Initialisation</u>

On connait $u_0 = 2\,000$ et $u_1 = 1\,900$
$1\,000 < u_1 \leq u_0$ Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- <u>Hérédité</u>

Soit k un entier naturel. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
Alors $1\,000 < u_{k+1} \leq u_k$
$0,9 > 0$. On en déduit : $0,9 \times 1\,000 < 0,9\,u_{k+1} \leq 0,9\,u_k$
Puis : $900 + 100 < 0,9\,u_{k+1} + 100 \leq 0,9\,u_k + 100$
Or, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = 0,9\,u_k + 100$
Donc : $1\,000 < u_{k+2} \leq u_{k+1}$. Ainsi, $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- <u>Conclusion</u>

$\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire. On en conclut que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 1\,000 < u_{n+1} \leq u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1\,000 < u_{n+1} \leq u_n$
On en déduit que la suite (u_n) est décroissante et minorée par $1\,000$.
Ce qui prouve que la suite (u_n) converge vers un réel $L \geq 1\,000$

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,9$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1\,000$
Or $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 100$
$v_n = u_n - 1\,000 \iff u_n = v_n + 1\,000$

Donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,000$
Donc $v_{n+1} = 0,9\,u_n + 100 - 1\,000 = 0,9\,u_n - 900$
Donc $v_{n+1} = 0,9\,(v_n + 1\,000) - 900$
$v_{n+1} = 0,9\,v_n + 900 - 900$
$v_{n+1} = 0,9\,v_n$

Ce qui prouve que (v_n) est géométrique de raison $0,9$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 1\,000(1 + 0,9^n)$

(v_n) est géométrique de raison $0,9$.
Son 1[er] terme est : $v_0 = u_0 - 1\,000 = 2\,000 - 1\,000 = 1\,000$
Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1\,000 \times 0,9^n$
De plus, $u_n = 1\,000 + 1\,000 \times 0,9^n = 1\,000\,(1 + 0,9^n)$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n). En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1\,000(1 + 0,9^n)$
$0,9 \in]-1\,;\,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$
On en déduit, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 0,9^n = 1$ puis, par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1\,000(1 + 0,9^n) = 1\,000$
Ainsi, la suite (u_n) converge vers $L = 1\,000$.
Cela signifie que, dans un très grand nombre d'années, le nombre d'individus de cette population se rapprochera de $1\,000$.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec S > 1000).

   a) Dans le programme Python ci-dessous, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population. Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

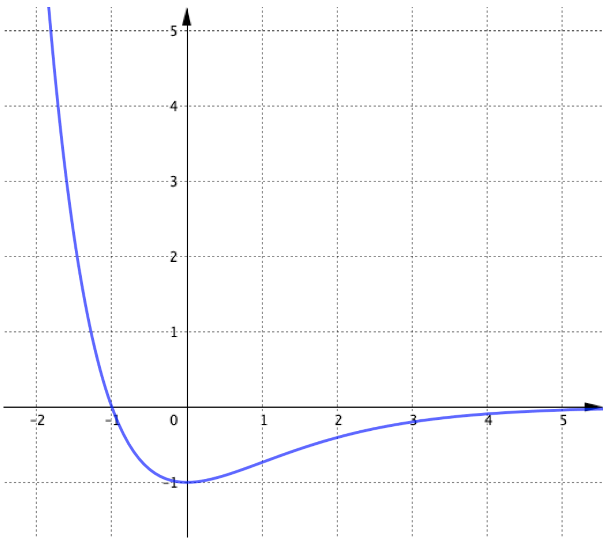
```python
def population(S):
    n=0
    u=2000
    while u>=S:
        u=0.9*u+100
        n=n+1
    return n
```

   b) Que faut-il taper dans la console Python pour déterminer au bout de combien d'année on pourra estimer que la population aura atteint sa limite ? Donner le résultat obtenu.

En tapant population(1001) on obtient 66.
C'est le nombre d'année au bout duquel on peut estimer que le nombre d'individus passera en dessous de $1\,001$.
On peut alors estimer que la population atteindra sa limite au bout de 66 ans.

Exercice 3 :

Partie A



On donne ci-contre, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

f' semble positive sur $]-\infty\,;\,-1[$ puis négative sur $]-1\,;\,+\infty[$.
On conjecture alors que f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ puis décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

f' semble décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ puis croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. On conjecture alors que sa dérivée f'' est négative sur $]-\infty\,;\,0]$ puis positive sur $[0\,;\,+\infty[$.
f serait donc concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On admet que la fonction f mentionnée dans la **Partie A** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\, e^{-x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note respectivement f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

   On admettra, sans le justifier, que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\, e^{-x} = \dfrac{x+2}{e^x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$
D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$
D'autre part, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. On en déduit, par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$
Ainsi, par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = (-x-1)\, e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\, e^{-x} = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = -1\, e^{-x}$
Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$f'(x) = 1\, e^{-x} - e^{-x}(x+2)$
$f'(x) = e^{-x}\,[1 - (x+2)]$
$f'(x) = (1 - x - 2)\, e^{-x}$
$f'(x) = (-x-1)\, e^{-x}$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variations.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\, e^{-x}$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$. On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$
Or $-x-1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x < -1$. Donc $f'(x)$ est strictement positif sur $]-\infty\,;\,-1[$, strictement négatif sur $]-1\,;\,+\infty[$.
Ainsi, f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ puis décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.
Le maximum atteint par f est : $f(-1) = (-1+2)\, e^1 = e$. On en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$.
D'autre part $f(-2) = (-2+2)\, e^2 = 0 < 2$ tandis que $f(-1) = e \approx 2,72 > 2$
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α sur $[-2\,;\,-1]$.
La calculatrice permet de déterminer $\alpha \approx -1,6$

3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\,e^{-x} = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = -x-1$ et $v(x) = e^{-x}$
Donc $f''(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$f''(x) = -1\,e^{-x} - e^{-x}(-x-1)$
$f''(x) = e^{-x}\,[-1-(-x-1)]$
$f''(x) = (-1+x+1)\,e^{-x}$
$f''(x) = x\,e^{-x}$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$. On en déduit que le signe de $f''(x)$ est celui de x
Donc $f''(x)$ est négative sur $]-\infty\,;\,0]$ puis positive sur $[0\,;\,+\infty[$.
Ce qui prouve que f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

<u>Exercice 4</u> :

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a DC = 6, DA = DH = 4.

Soit les points I, J et K tels que :

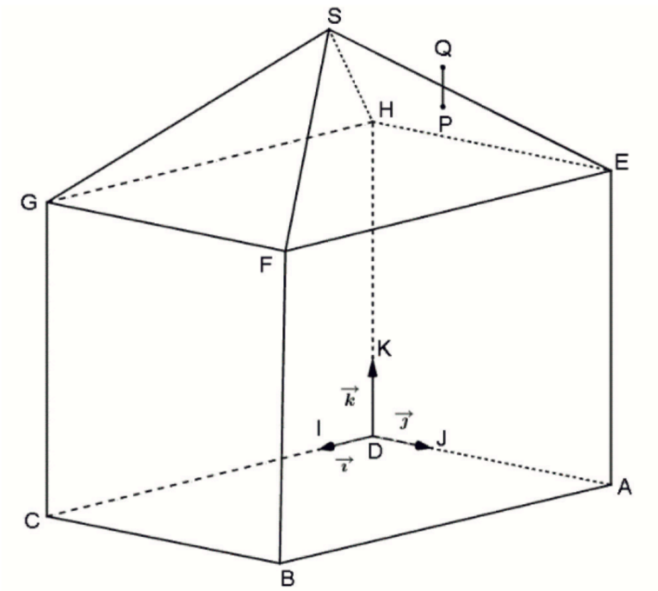
$$\overrightarrow{\mathrm{DI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DA}} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{DK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DH}}$$

On note :

$$\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{DI}} \quad ; \quad \vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{DJ}} \quad ; \quad \vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{DK}}$$

On se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;\,2\,;\,6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.

B$(6\,;\,4\,;\,0)$ E$(0\,;\,4\,;\,4)$ F$(6\,;\,4\,;\,4)$ G$(6\,;\,0\,;\,4)$

2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ et h désignent respectivement l'aire de la base et la hauteur du tétraèdre.

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$
où $\mathcal{B}$ représente l'aire de la base EFGH, rectangulaire. Ainsi : $\mathcal{B} = \mathrm{HE} \times \mathrm{HG} = \mathrm{DA} \times \mathrm{DC} = 6 \times 4 = 24$
La hauteur h correspond à la différence entre la cote de S (sa 3$^{\text{ème}}$ coordonnée) et la hauteur DH du pavé droit.
Ainsi, $h = 6 - 4 = 2$
On en déduit $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16\,\mathrm{m}^3$
Pour calculer le volume total de la maison, on ajoute le volume du pavé droit ABCDEFGH :
$\mathcal{V}_p = \mathrm{DA} \times \mathrm{DC} \times \mathrm{DH} = 6 \times 4 \times 4 = 96\,\mathrm{m}^3$
$\frac{16}{16+96} = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}$

Ainsi, le volume de la pyramide EFGHS représente bien le septième du volume total de la maison.

3. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(\,0\,;\,1\,;\,1\,)$ est normal au plan (EFS).

Le plan (EFS) est dirigé par le couple de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ES}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}} \\ y_{\mathrm{F}} - y_{\mathrm{E}} \\ z_{\mathrm{F}} - z_{\mathrm{E}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix} 6-0 \\ 4-4 \\ 4-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{S}} - x_{\mathrm{E}} \\ y_{\mathrm{S}} - y_{\mathrm{E}} \\ z_{\mathrm{S}} - z_{\mathrm{E}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-4 \\ 6-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\dfrac{6}{3} = 2$ mais $\dfrac{0}{-2} = 0 \neq 2$ donc $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ ne sont pas colinéaires.

On montre que $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à chacun d'eux :

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{EF}} = 0 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$ $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{ES}} = 0 \times 3 + 1 \times (-2) + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$

Ce qui prouve que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (EFS)

b) En déduire que $y + z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (EFS).

$\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFS). Ce plan passe par E $(\,0\,;\,4\,;\,4\,)$.

M $(\,x\,;\,y\,;\,z\,) \in$ (EFS) $\Leftrightarrow \vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{EM}} = 0$ avec $\overrightarrow{\mathrm{EM}}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-4 \\ z-4 \end{pmatrix}$

$$0(x-0) + 1(y-4) + 1(z-4) = 0$$
$$y - 4 + z - 4 = 0$$
$$y + z - 8 = 0$$

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS) ;
- le point Q a pour coordonnées $(\,2\,;\,3\,;\,5{,}5\,)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5{,}5 + t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

La droite (PQ) passe par Q $(\,2\,;\,3\,;\,5{,}5\,)$ et a pour vecteur directeur $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\begin{cases} x = 2 + 0t \\ y = 3 + 0t \\ z = 5{,}5 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5{,}5 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (PQ).

b) En déduire les coordonnées du point P.

P $(x \,;\, y \,;\, z)$ est le point d'intersection de la droite (PQ) avec le plan (EFS).
Les coordonnées de P vérifient à la fois l'équation cartésienne du plan (EFS) :

$$y + z - 8 = 0$$

et la représentation paramétrique de (PQ) précédemment obtenue : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases}$ où $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$

On détermine le paramètre t associé au point P :

$3 + 5,5 + t - 8 = 0$

$0,5 + t = 0$

$t = \text{-}0,5$

On en déduit les coordonnées de P : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 - 0,5 = 5 \end{cases}$. Ainsi, P $(2 \,;\, 3 \,;\, 5)$

c) En déduire la longueur PQ de l'antenne.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{P}} \\ y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{P}} \\ z_{\mathrm{Q}} - z_{\mathrm{P}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\begin{pmatrix} 2-2 \\ 3-3 \\ 5,5-5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ Donc PQ = $\| \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,5^2} = 0,5$

5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \text{-}4 + 6k \\ y = 7 - 4k \\ z = 2 + 4k \end{cases} \quad \text{où } \mathrm{k} \in \mathbb{R}$$

L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

On détermine si la droite Δ : $\begin{cases} x = \text{-}4 + 6k \\ y = 7 - 4k \\ z = 2 + 4k \end{cases}$ où $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$ coupe la droite (PQ) : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases}$ où $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2 = \text{-}4 + 6k \\ 3 = 7 - 4k \\ 5,5 + t = 2 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6k = 6 \\ 4k = 4 \\ 4k - t = 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ \text{-}t = 3,5 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ \text{-}t = \text{-}0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ t = 0,5 \end{cases}$$

Le système admettant un couple unique de solutions réelles $(k \,;\, t) = (1 \,;\, 0,5)$, les deux droites sont sécantes en un unique point M de paramètre $k = 1$. On en déduit que les droites Δ et (PQ) sont sécantes en le point de paramètre $t = 0,5$ de Δ :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + 0,5 = 6 \end{cases}$$

Le point d'intersection de Δ et (PQ) est M $(2 \,;\, 3 \,;\, 6)$.
Celui-ci est au dessus du sommet de l'antenne Q $(2 \,;\, 3 \,;\, 5,5)$. Donc l'oiseau ne percutera pas l'antenne.