<u>Exercice n°1 :</u> *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité* **5 points**

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n - 6$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$

3. On considère l'affirmation : « Pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
   Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.
   b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n$et v_{n+1} sont premiers entre eux.
   c. En déduire , pour tout entier $n \geq 1$,le PGCD de $u_n$et u_{n+1}.
5. a. Vérifier que $2^4 \equiv 1[5]$.
   b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
   c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?Justifier.

Exercice n°1 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 6$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 9\text{x}2^n - 6$.

On pose p_n : " $u_n = 9\text{x}2^n - 6$",
(1)Initialisation
n=0, $u_0 = 9\text{x}2^0 - 6$ =9x1-6 = 3 or $u_0 = 3$ donc P_0 est vraie.
(2) Hérédité
Soit k un entier naturel avec $k \geq 0$,
On suppose que P_k est vraie démontrons que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire : $u_{k+1} = 9\text{x}2^{k+1} - 6$.
P_k est vraie $\Leftrightarrow u_k = 9\text{x}2^k - 6$.
$\Leftrightarrow 2\text{x}\, u_k = 2(9\text{x}2^k - 6)$
$\Leftrightarrow 2\text{x}\, u_k + 6 = 9\text{x}2^{k+1} - 12 + 6$, or $u_{k+1} = 2u_k + 6$
$\Leftrightarrow u_{k+1} = 9\text{x}2^{k+1} - 6$. donc P_{k+1} est vraie , la propriété est héréditaire
(3)Conclusion
- P_0 est vraie
- la propriété est héréditaire

Donc ∀n∈ℕ, la propriété est vraie, donc $u_n = 9\text{x}2^n - 6$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

pour tout entier $n \geq 1, n - 1 \geq 0$
$$u_n = 9\text{x}2^n - 6$$
$$= 3\text{x}3\text{x}2\text{x}2^{n-1} - 6$$
$$=6(3\text{x}2^{n-1} - 1)\quad ,$$
pour tout entier $n \geq 1, n - 1 \geq 0$ donc $2^{n-1} \geq 1$
$$3\text{x}2^{n-1} - 1 \geq 2, \text{ donc } \quad 3\text{x}2^{n-1} - 1 \in \mathbb{N}$$
On en déduit que u_n est un multiple de 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « Pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6} \Leftrightarrow v_n = \frac{6(3\text{x}2^{n-1}-1)}{6} = 3\text{x}2^{n-1} - 1$
En utilisant la TABLE de la calculatrice , en rentrant la fonction f(x)= $3\text{x}2^{x-1} - 1$, on voit que f(6)= $3\text{x}2^{6-1} - 1$ =95 est un multiple de 5 et donc n'est pas premier .
donc $v_6 = 95$ n'est pas premier.
L'affirmation est fausse.

4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.
b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
c. En déduire , pour tout entier $n \geq 1$,le PGCD de u_n et u_{n+1}.

a. $v_{n+1} - 2v_n = \frac{u_{n+1}}{6} - 2\text{x}\frac{u_n}{6} = \frac{u_{n+1} - 2\text{x}u_n}{6} = \frac{2u_n + 6 - 2u_n}{6} = \frac{6}{6} = 1$
b. d'après le a. pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1 \Leftrightarrow 1\text{x}v_{n+1} + (-2)v_n = 1$
on en déduit d'après le théorème de Bézout que v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
c. pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux, donc PGCD$(v_{n+1}; v_n) = 1$

5. a. Vérifier que $2^4 \equiv 1[5]$.

   b. En déduire que si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

   c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?Justifier.

a . $2^4 \equiv 16[5]$ ⇔ $2^4 \equiv 1[5]$ car 16=3x5+1

b. $2^4 \equiv 1[5]$ donc $(2^4)^{\mathrm{k}} \equiv 1^{\mathrm{k}}[5]$, avec k entier naturel .

$$(2^4)^{\mathrm{k}}\mathrm{x}2^2 \equiv 1\mathrm{x}2^2[5]$$

$$2^{4\mathrm{k}+2} \equiv 4\ [5]$$

or $u_n = 9\mathrm{x}2^n - 6$ donc $u_{2k+2} = 9\mathrm{x}2^{2k+2} - 6$

$9\mathrm{x}2^{4\mathrm{k}+2} \equiv 9\mathrm{x}4\ [5]$ or 36=5x7 +1 d'où $9\mathrm{x}2^{4\mathrm{k}+2} \equiv 1\ [5]$

on en déduit que $9\mathrm{x}2^{4\mathrm{k}+2} - 6 \equiv$ 1-6 [5] donc $u_{2k+2} \equiv -5[5]$ d'où

$u_{2k+2} \equiv 0[5]$ donc si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

c. $\mathrm{u}_0 = 3$ n'est pas un multiple de 5 donc u_n n'est pas divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n (utilisasion d'un contre exemple).

Remarque : $u_1 = 9\mathrm{x}2^1 - 6$ =18-6=12 n'est pas un multiple de 5 non plus etc….