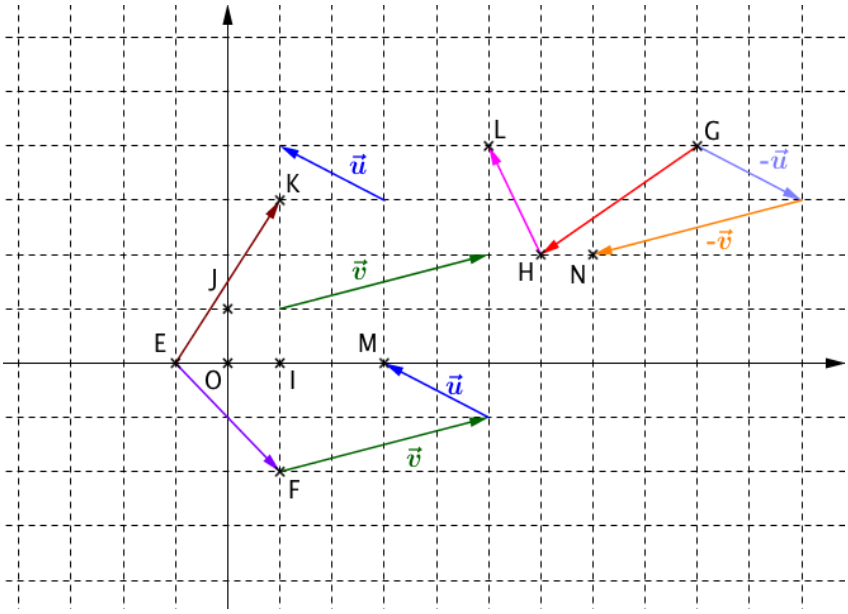
Devoir commun n°2
Correction

Exercice 1 : Vecteurs

Partie A :



1. Graphiquement, on lit : $\vec{GH}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{EF}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

2. Construire les points K, L, M et N tels que :

$$\vec{EK}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad \vec{HL}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \quad \vec{FM} = \vec{v}+\vec{u} \quad \vec{GN} = -\vec{u}-\vec{v}$$

Partie B : Dans un repère, on considère les points A (-2 ; 0), B (3 ; -1), C (5 ; 4) et D (0 ; 5).

1. a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ $\quad\vec{AB}\begin{pmatrix}3+2\\-1-0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}$ $\quad\vec{DC}\begin{pmatrix}5-0\\4-5\end{pmatrix}$ $\quad\vec{DC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ ont les mêmes coordonnées. Donc $\vec{AB} = \vec{DC}$.

b) Que peut-on en déduire ?
Puisque $\vec{AB} = \vec{DC}$ alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

c) Calculer les coordonnées du point E tel que ACBE est un parallélogramme.
ACBE est un parallélogramme. Donc $\vec{AC} = \vec{EB}$.
On en déduit :

$$\begin{cases}x_C-x_A=x_B-x_E\\y_C-y_A=y_B-y_E\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5+2=3-x_E\\4-0=-1-y_E\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_E=3-7\\y_E=-1-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_E=-4\\y_E=-5\end{cases}$$

2. a) Démontrer que le point F $(\frac{3}{2}$; 2) est le milieu de [AC].

$\vec{AF}\begin{pmatrix}x_F-x_A\\y_F-y_A\end{pmatrix}$ $\quad\vec{AF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+2\\2-0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{AF}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\2\end{pmatrix}$

$\vec{FC}\begin{pmatrix}x_C-x_F\\y_C-y_F\end{pmatrix}$ $\quad\vec{FC}\begin{pmatrix}5-\frac{3}{2}\\4-2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{FC}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC}$ donc F est le milieu de [AC].

b) Calculer les coordonnées du point G symétrique de A par rapport à B.
Si G est le symétrique de A par rapport à B alors B est le milieu de [AG]. On en déduit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$.

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_G + x_B \\ y_B - y_A = y_G - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2 = x_G - 3 \\ -1-0 = y_G + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+3 = x_G \\ -1-1 = y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 8 \\ y_G = -2 \end{cases}$$

<u>Exercice 2 :</u>

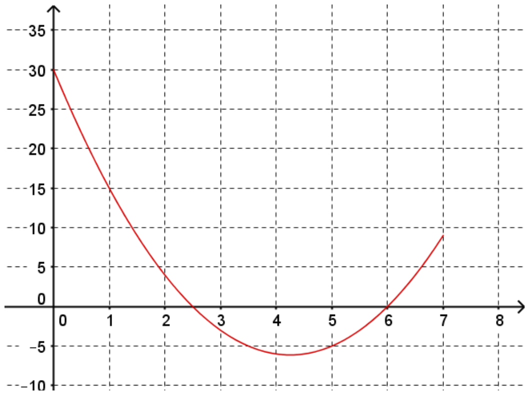
1.

a) $h(0) = 2 \times 0^2 - 17 \times 0 + 30 = 30$
La hauteur de la falaise est donc de 30m.

b)

x	0	1	2	3	3.5	4	5	5.5	6	6.5	7
$h(x)$	30	15	4	-3	-5	-6	-5	-3	0	4	9

c)



d) On conjecture que la hauteur minimale de l'oiseau est atteinte lorsque celui-ci se situe à environ 4,25 mètres de la rive.

2.

a) $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-17)}{2 \times 2} = \frac{17}{4} = 4{,}25$

$\beta = f(\alpha) = 2 \times \left(\frac{17}{4}\right)^2 - 17 \times \frac{17}{4} + 30 = -6{,}125$

On sait que $a = 2 > 0$, ainsi f admet un minimum $m = -6{,}125$ atteint en $x = 4{,}25$.

b)

x	0	4,25	7
Variations de f	30 ↘	$-6{,}125$	↗ 9

$a = 2 > 0$ donc la parabole est « tournée vers le haut » .

c) $2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-6) = (2x-5)(x-6) = 2x^2 - 12x - 5x + 30 = 2x^2 - 17x + 30 = f(x)$

3. L'oiseau peut plonger à une profondeur maximale de 6,125 m lorsqu'il est situé à 4,25m de la rive.

4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-6) = 0$

Or un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

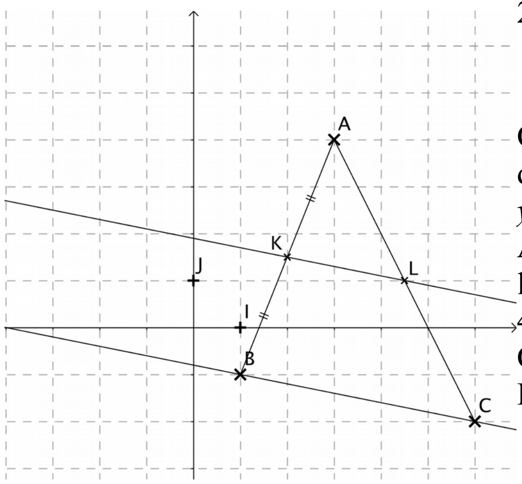
Donc : $x - \frac{5}{2} = 0 \; ou \; x - 6 = 0$

Donc : $x = \frac{5}{2} \; ou \; x = 6$

Conclusion : l'oiseau est entré dans l'eau lorsqu'il était à 2,5 mètres de la rive puis il est ressorti à 6 mètres de la rive.
Graphiquement, ces valeurs représentent les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses (droite d'équation $y=0$).

5. L'oiseau a parcouru 10 m (soit 0,01 km) sous l'eau à une vitesse de 4 km/h.
Or $v=\frac{d}{t}$
Donc $t=\frac{d}{v}=\frac{0{,}01}{4}=2{,}5\times10^{-3}$
L'oiseau est donc resté $2{,}5\times10^{-3}$ h sous l'eau.
Or $2{,}5\times10^{-3}\times3\,600=9$
L'oiseau est donc resté 9 secondes sous l'eau.`

Exercice 3 :



2. a. Calcul du coefficient directeur de la droite (AC) :
$\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-2-4}{6-3}=-2$
On en déduit qu'il existe un nombre réel b tel que l'équation de la droite (AC) soit :
$y = -2x + b$.
A appartient à la droite (AC) sont les coordonnées de A vérifient l'équation de cette droite, d'où :
$4 = -2\times3+b$
On en déduit que $b = 4 + 6 = 10$
L'équation de la droite (AC) est bien $y = -2x + 10$.

b. Comme K est le milieu du segment [AB], on a :
$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+1}{2}=2$ et $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}$

On sait que la droite (d) est parallèle à la droite (BC), elles ont par conséquent le même coefficient directeur.
Calcul du coefficient directeur de (BC) :
$\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-2-(-1)}{6-1}=-0{,}2$
Il existe donc un nombre réel b' tel que l'équation de la droite (d) soit : $y = -0{,}2x + b'$.
K appartient à la droite (d) donc ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.
D'où $\frac{3}{2}=-0{,}2\times2+b'$
On en déduit que $b' = \frac{3}{2}+0{,}4=1{,}9$. L'équation de la droite (d) est bien $y = -0{,}2x + 1{,}9$.

c. Les droites (d) et (AC) n'ayant pas le même coefficient directeur, elles sont sécantes.
On note M(x;y) leur point d'intersection.
Les coordonnées de M vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} y=-2x+10 \\ y=-0{,}2x+1{,}9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+10 \\ -2x+10=-0{,}2x+1{,}9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+10 \\ -1{,}8x=-8{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+10 \\ x=\frac{-8{,}1}{-1{,}8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+10 \\ x=4{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\times4{,}5+10 \\ x=4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4{,}5 \end{cases}$$

Le point d'intersection des droites (d) et (AC) a pour coordonnées (4,5;1).

3. a. Comme L est le milieu du segment [AC], on a :

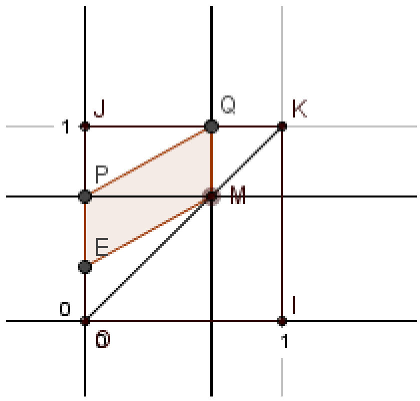
$x_L = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+6}{2} = 4{,}5$ et $y_L = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = 1$

Les coordonnées de L sont (4,5;1).

b. On remarque que L est le point d'intersection des droites (d) et (AC).
Ce résultat était prévisible. En effet, dans le triangle ABC, K est le milieu de [AB] et (d) est la droite parallèle à (BC) passant par K. D'après le théorème des milieux, (d) coupe alors le segment [AC] en son milieu.

Exercice 4 :

1. Figure :



2. Dans le repère orthonormé (O ; I ; J), OIKJ est un carré, donc, la diagonale [OK] a pour équation $y = x$, Ainsi, le point M, d'abscisse x , a pour ordonnée x .
3. M appartient au segment [OK], le carré OIKJ a des côtés de mesure 1, donc x appartient à l'intervalle $[0;1]$
4. a) - P appartient à la droite (OJ) et son ordonnée est la même que celle de M, donc P a pour coordonnées P $(0;x)$.
   - Q appartient à la droite (KJ) et son abscisse est la même que celle de M, donc Q a pour coordonnées Q $(x;1)$.

   b) $PQ = \sqrt{(x-0)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

   $MI = \sqrt{(1-x)^2 + (0-x)^2} = \sqrt{1 - 2x + x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

   Ainsi, MI = QP.
5. a) MQPE est un parallélogramme, donc les vecteurs $\overrightarrow{QM}$ et $\overrightarrow{PE}$ sont égaux.

   $\overrightarrow{QM}(x-x;x-1)$, d'où $\overrightarrow{QM}(0;x-1)$

   $\overrightarrow{PE}(x_E - 0; y_E - x)$, d'où $\overrightarrow{PE}(x_E; y_E - x)$

   $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PE}$, on obtient ainsi, $\begin{cases} x_E = 0 \\ y_E - x = x - 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_E = 0 \\ y_E = 2x - 1 \end{cases}$

   Ainsi, E a pour coordonnées $E(0;2x-1)$.

   b) MQPE est un parallélogramme, donc $ME = PQ$,
   de plus, $MI = PQ$, ainsi, $MI = ME = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$, donc le triangle IME est isocèle de sommet principale IME.

   $IE = \sqrt{(0-1)^2 + (2x-1-0)^2} = \sqrt{1 + (2x-1)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 - 4x + 1}$

   $IE^2 = 4x^2 - 4x + 2$

   $MI^2 + ME^2 = 2 \times (2x^2 - 2x + 1) = 4x^2 - 4x + 2$

   Ainsi, $IE^2 = MI^2 + ME^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, IME est un triangle rectangle en M.
   Ainsi, IME est un triangle rectangle isocèle en M.

   c) IME est un triangle rectangle en M, ainsi, les droites (IM) et (ME) sont perpendiculaires.
   De plus, MQPE est un parallélogramme, ainsi, les droites (QP) et (ME) sont parallèles.
   Donc, les droites (IM) et (QP) sont perpendiculaires