Nom : *Classe* : 2nde	**Devoir commun n°1** le 25/01/2017	*Note* : … / 30

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le sujet devra être rendu.
Le barème inclut 2 points de bonus. La note finale sera enregistrée sur 30.

Exercice 1 : Valeurs atypiques **… / 6,5 points**

Une machine déverse du caoutchouc de façon continue dans un moule pour fabriquer des joints d'étanchéité pour l'industrie automobile. Pour contrôler la régularité de l'écoulement, on a effectué 22 mesures de la masse de caoutchouc (en grammes) écoulé sur des durées de 10 secondes. On a obtenu la série statistique suivante :

53,1	53,5	58,4	58,7	60,7	61,2	61,4	62,3	62,4	63,1	63,3
63,6	64,5	64,5	65,5	65,9	66,1	66,2	66,4	70,2	72,2	73,7

1. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	i est un entier naturel S, X et M sont trois réels
Initialisation :	S prend la valeur 0
Traitement : **Entrées :**	Pour i allant de 1 à 22 Saisir X S prend la valeur $S + X$ Fin Pour M prend la valeur $S \div 22$
Sortie :	Afficher M

On ne demande pas de programmer cet algorithme dans la calculatrice.

a) Que permet de faire cet algorithme ?

b) Donner la valeur affichée en sortie, à 10^{-2} près, lorsque les valeurs saisies sont celles de la série.

2. a) Déterminer l'étendue e, la médiane M_e, les quartiles Q_1et Q_3.

b) Interpréter les valeurs de M_e, Q_1et Q_3 en termes de pourcentages.

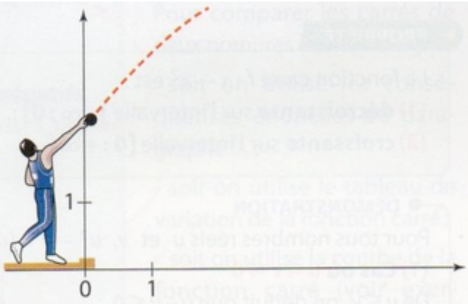
3. L'écart inter-quartiles I d'une série statistique est défini comme la différence entre Q_3 et Q_1.
On considère comme « *atypiques* » les mesures qui sortent de l'intervalle [$Q_1 - 1,5I$; $Q_3 + 1,5I$].

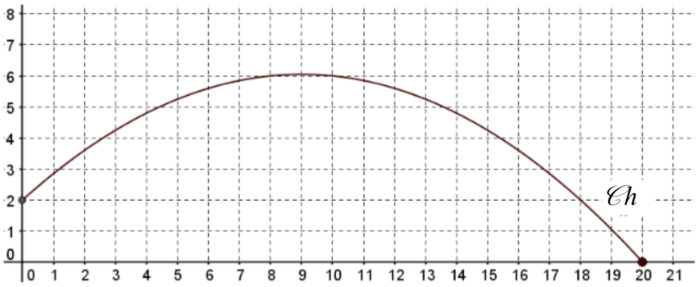
a) Déterminer cet intervalle.

b) Identifier les valeurs atypiques puis calculer la fréquence f_a associée, à 10^{-1} près.

Exercice 2 : **… / 11 points**

Lors d'une compétition d'athlétisme, on s'intéresse à la trajectoire suivie par le poids lancé par Mickaël.
La fonction h définie par $h(x) = -0,05x^2 + 0,9x + 2$ permet de modéliser la hauteur du poids, en mètres.
Ainsi, $h(x)$ est la hauteur du poids lorsque la distance parcourue horizontalement est x mètres.
On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}h$ *de* la fonction h dans un repère orthonormé.





Partie A :

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}h$ de h?
2. L'algorithme suivant permet de déterminer, pour une distance parcourue horizontalement X saisie en entrée, si le poids est retombé au sol ou non.

Variables :	X et H sont deux réels
Entrée :	Saisir …
Traitement :	H prend la valeur … Si …
Sortie :	Alors Afficher « Le poids est retombé au sol » Sinon …
	Fin Si

   Compléter l'algorithme.

3. a) Compléter le tableau de valeurs de h sur $\mathscr{D}h$ avec un pas de 2 :

x	0	2						14			
$h(x)$								4,8			

   b) Interpréter les résultats de la colonne colorée dans le contexte de l'exercice.

4. Avec la précision permise par le graphique, résoudre graphiquement :
   a) $h(x) = 4$
   b) $h(x) < 1{,}5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Conjecturer graphiquement la hauteur maximale du poids et la valeur de x pour laquelle ce maximum est atteint.

Partie B :

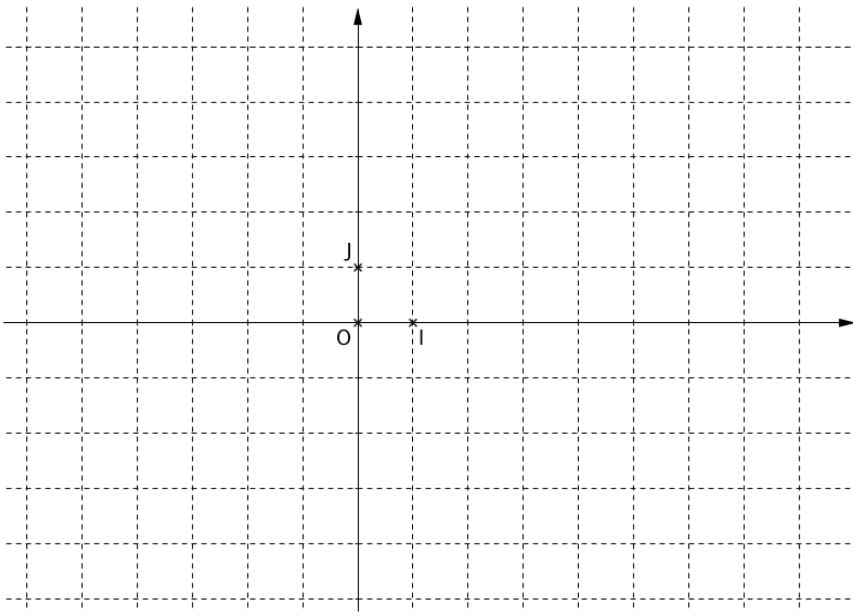
On rappelle que h est définie sur [0 ; 20] par : $h(x) = -0,05x^2 + 0,9x + 2$.

1. a) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $h(x) = \frac{1}{20}(-x-2)(x-20)$.
   b) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $h(x) = -0,05(x-9)^2 + 6,05$.
2. Calculer l'image de 9 par la fonction h à l'aide de la forme la plus adaptée.
3. Résoudre l'équation $h(x) = 0$ dans l'intervalle [0 ; 20]. Interpréter le résultat.
4. a) Résoudre l'inéquation $h(x) \leq h(9)$.
   b) En déduire l'extremum de h sur [0 ; 20]. Interpréter le résultat.
5. a) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur [0 ; 20].
   b) En utilisant uniquement le tableau de variations, comparer $h(11)$ et $h(13)$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 : **… / 8 points**

On se place dans le repère orthonormé $(O;I;J)$ ci-dessous et on considère les points

$A(-1;-1)$ $B(3;1)$ $C(0;-2)$ $D(2;-2)$.

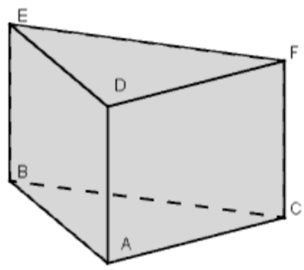


1. Placer les points A, B, C et D dans le repère.
   La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Déterminer la nature du triangle ADB.
3. Soit E le milieu du segment [AB]. Calculer les coordonnées de E.
4. Que peut-on dire des droites (DE) et (AB) ?
5. Soit F le symétrique de D par rapport au point E. Quelle est la nature du quadrilatère ADBF ?
6. Démontrer que les points A, B, C, D et F appartiennent à un même cercle de centre E. Préciser le rayon.

Exercice 4 : **… / 6,5 points**

ABCDEF est un prisme droit de base triangulaire ABC et de dimensions :

$AB = AC = 4$ cm $BC = 4\sqrt{3}$ cm $BE = 6$ cm



1. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.
2. On note H le point de [BC] tel que [AH] soit une hauteur du triangle ABC.
   a) Montrer que la longueur AH mesure 2 cm.
   b) Calculer l'aire du triangle ABC.
   c) Calculer le volume du prisme ABCDEF.
   d) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
3. Soit I un point de [AD]. Déterminer en justifiant la position relative des droites (BC) et (EI).
4. Soit M le point d'intersection des droites (AE) et (BD).
   a) Montrer que M appartient à l'intersection des plan (BDF) et (ACE).
   b) Déterminer l'intersection des plans (BDF) et (ACE).

Correction du devoir commun n°1 – janvier 2017

Exercice 1 : Valeurs atypiques

Une machine déverse du caoutchouc de façon continue dans un moule pour fabriquer des joints d'étanchéité pour l'industrie automobile. Pour contrôler la régularité de l'écoulement, on a effectué 22 mesures de la masse de caoutchouc (en grammes) écoulé sur des durées de 10 secondes. On a obtenu la série statistique suivante :

53,1	53,5	58,4	58,7	60,7	61,2	61,4	62,3	62,4	63,1	63,3
63,6	64,5	64,5	65,5	65,9	66,1	66,2	66,4	70,2	72,2	73,7

1. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	i est un entier naturel S, X et M sont trois réels
Initialisation :	S prend la valeur 0
Traitement : **Entrées :**	Pour i allant de 1 à 22 Saisir X S prend la valeur $S + X$ Fin Pour M prend la valeur $S \div 22$
Sortie :	Afficher M

On ne demande pas de programmer cet algorithme dans la calculatrice.

a) Cet algorithme permet de calculer la moyenne d'une série de notes.

b) La valeur affichée en sortie est M ≈ 63,50.

2. a) L'étendue est : e = 73,7 – 53,1 = 20,6

La série contient 22 valeurs donc N = 22.

- $\frac{N}{2}$ = 11
  On en déduit que la médiane est la moyenne entre la 11ème et la 12ème valeur.
  $M_e = \frac{x_{11}+x_{12}}{2} = \frac{63{,}3+63{,}6}{2}$ = 63,45
- $\frac{N}{4}$ = 5,5.
  On en déduit que le 1er quartile Q_1est la 6ème valeur. $Q_1 = x_6$ = 61,2
- $\frac{3N}{4}$ = 16,5.
  On en déduit que le 3ème quartile Q_3est la 17ème valeur. $Q_3 = x_{17}$ = 66,1

b) Interprétation des résultats :
Q_1 = 61,2 Donc au moins 25 % des mesures effectuées sont inférieures à 61,2 g.
M_e = 63,45 Donc 50 % des mesures effectuées sont inférieures à 63,45 g.
Q_3 = 66,1 Donc au moins 75 % des mesures effectuées sont inférieures à 66,1 g.

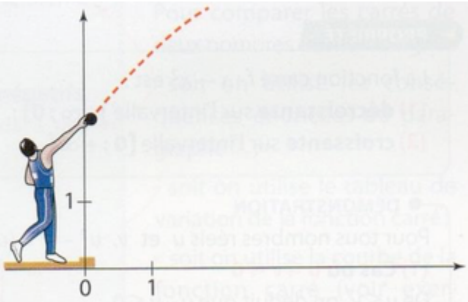
3. L'écart inter-quartiles I d'une série statistique est défini comme la différence entre Q_3 et Q_1.
On considère comme « *atypiques* » les mesures qui sortent de l'intervalle [$Q_1 - 1,5I$; $Q_3 + 1,5I$].

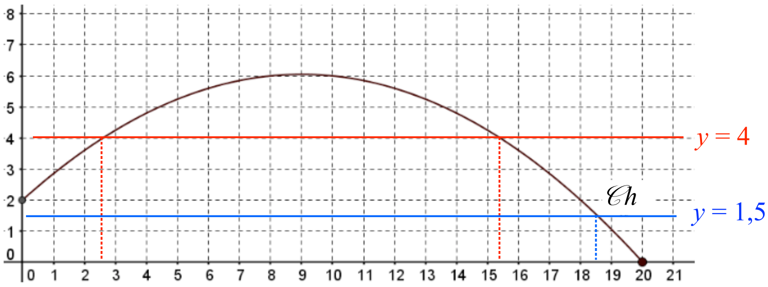
a) Pour déterminer cet intervalle on commence par déterminer I.
$I = Q_3 - Q_1$ = 66,1 – 61,2 = 4,9
[$Q_1 - 1,5I$; $Q_3 + 1,5I$] = [$61,2 - 1,5 \times 4,9$; $66,1 + 1,5 \times 4,9$] = [$53,85$; $73,45$]

b) Les valeurs atypiques sont celles qui ne rentrent pas dans l'intervalle : 53,1 ; 53,5 et 73,7
On en compte 3 parmi les 22 relevées. On en déduit la fréquence des valeurs atypiques :
$f_a = \frac{3}{22} \approx 0{,}1$ ou : $f_a = \frac{3}{22} \times 100 \approx 13{,}6$ %.

Exercice 2 :

Lors d'une compétition d'athlétisme, on s'intéresse à la trajectoire suivie par le poids lancé par Mickaël.
La fonction h définie par $h(x) = -0,05x^2 + 0,9x + 2$ permet de modéliser la hauteur du poids, en mètres.
Ainsi, $h(x)$ est la hauteur du poids lorsque la distance parcourue horizontalement est x mètres.
On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}h$ *de* la fonction h dans un repère orthonormé.





Partie A :

1. L'ensemble de définition de h est $\mathscr{D}h$ = [0 ; 20]
2. L'algorithme suivant permet de déterminer, pour une distance parcourue horizontalement X saisie en entrée, si le poids est retombé au sol ou non.

Variables :	X et H sont deux réels
Entrée :	Saisir X
Traitement :	H prend la valeur $-0,05X^2 + 0,9X + 2$ Si $H \leq 0$
Sortie :	Alors Afficher « Le poids est retombé au sol » Sinon Afficher « Le poids est en l'air » Fin Si

3. a) Compléter le tableau de valeurs de h sur $\mathscr{D}h$ avec un pas de 2 :

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$h(x)$	2	3.6	4.8	5.6	6	6	5.6	4.8	3.6	2	0

b) Interpréter les résultats de la colonne colorée dans le contexte de l'exercice.
Lorsque le poids aura parcourue 14 m horizontalement, il sera à une hauteur de 4,8 m.

4. Avec la précision permise par le graphique, résoudre graphiquement :

a) Graphiquement : $h(x) = 4 \iff x = 2{,}5$ ou $x = 15{,}4$

b) Graphiquement : $h(x) < 1{,}5 \iff x \in]18{,}5 ; 20]$

Interprétation : Le poids sera à une hauteur inférieure à 1,5 m lorsque la distance parcourue horizontalement sera comprise entre 18,5 et 20 m.

5. On conjecture graphiquement que la hauteur maximale est d'environ 6 m lorsque $x = 9$.

Partie B :

On rappelle que h est définie sur [0 ; 20] par : $h(x) = -0,05x^2 + 0,9x + 2$.

1. a) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $h(x) = \frac{1}{20}(-x - 2)(x - 20)$.
$\frac{1}{20}(-x - 2)(x - 20) = \frac{1}{20}(-x^2 + 20x - 2x + 40) = 0{,}05(-x^2 + 18x + 40) = -0,05x^2 + 0,9x + 2 = h(x)$

b) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $h(x) = -0,05(x - 9)^2 + 6,05$.
$-0,05(x - 9)^2 + 6,05 = -0,05(x^2 - 18x + 81) + 6,05 = -0,05x^2 + 0,9x + 2 = h(x)$

2. Calculer l'image de 9 par la fonction h à l'aide de la forme la plus adaptée.
$h(9) = -0,05(9 - 9)^2 + 6,05 = -0,05 \times 0^2 + 6,05 = 6,05$

3. Résoudre l'équation $h(x) = 0$ dans l'intervalle [0 ; 20]. Interpréter le résultat.

$h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{20}(-x-2)(x-20) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

$\frac{1}{20} \neq 0$ donc : $-x - 2 = 0$ ou : $x - 20 = 0$

$x = -2$ ou : $x = 20$

L'unique solution de $h(x) = 0$ dans l'intervalle [0 ; 20] est $x = 20$.

Interprétation : le poids tombera au sol à 20 mètres du lanceur.

4. a) Résoudre l'inéquation $h(x) \leq h(9)$.

$h(x) \leq h(9) \;\Leftrightarrow\; -0,05(x-9)^2 + 6,05 \leq 6,05 \;\Leftrightarrow\; -0,05(x-9)^2 \leq 0$

-0,05 < 0 et un carré est toujours positif ou nul donc : $\forall\, x \in [0\,;20]$, $-0,05(x-9)^2 \leq 0$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $h(x) \leq h(9)$ est S = [0 ; 20].

b) En déduire l'extremum de h sur [0 ; 20]. Interpréter le résultat.

$\forall\, x \in [0\,;20]$, $h(x) \leq h(9)$ c'est-à-dire : $h(x) \leq 6,05$.

On en déduit que h admet un maximum égal à 6,05 m. Il est atteint en $x = 9$.

Interprétation : La hauteur maximale du poids est de 6,05 m. Elle est atteinte pour une distance horizontale de 9 m.

5. a) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur [0 ; 20].

x	0		9		20
$h(x)$	2	↗	6,05	↘	0

b) 11 < 13 et h est décroissante sur [9 ; 20] donc $h(11) > h(13)$.

Interprétation : la hauteur du poids correspondant à une distance horizontale de 11m sera supérieure à la hauteur du poids après 13 mètres parcourus horizontalement.

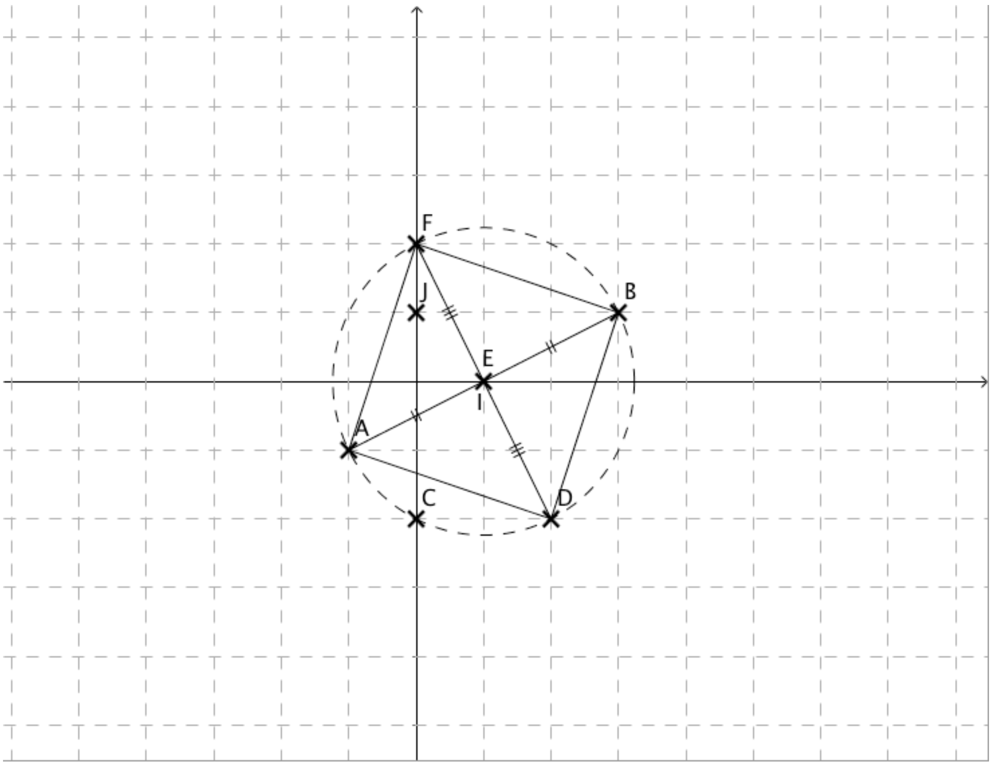
Exercice 3 :

On se place dans le repère orthonormé (O ; I ; J) ci-dessous et on considère les points

A(-1;-1) B(3;1) C(0;-2) D(2;-2).

1. Placer les points A, B, C et D dans le repère.

La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.



2. Déterminer la nature du triangle ADB.
   Comme $(O;I;J)$ est un repère orthonormé, on a :
   - $AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{(3+1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$
   - $AD=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$
   - $BD=\sqrt{(2-3)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

   Dans le triangle ABD, [AB] est le plus grand côté.
   D'une part : $AB^2=(\sqrt{20})^2=20$
   D'autre part : $AD^2+BD^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=10+10=20$
   On constate que : $AB^2=AD^2+BD^2$
   Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABD est rectangle en D.
   De plus, comme AD = BD, on en déduit que le triangle ABD est isocèle et rectangle en D.

3. Soit E le milieu du segment [AB]. Calculer les coordonnées de E.
   $x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$ $y_E=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{2}=0$
   Les coordonnées de E sont donc (1 ; 0).

4. Que peut-on dire des droites (DE) et (AB) ?
   Comme E est le milieu du segment [AB], (DE) est la médiane issue de D dans le triangle ABD.
   Or, dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal et la médiatrice de la base sont confondues.
   Donc (DE) est aussi la médiatrice du segment [AB].
   On en déduit que les droites (DE) et (AB) sont perpendiculaires.

5. Soit F le symétrique de D par rapport au point E. Quelle est la nature du quadrilatère ADBF ?
   On sait que :
   - AD = BD
   - F est le symétrique de D par rapport à E
   - A et B sont symétriques par rapport à E (puisque E est le milieu de [AB]).

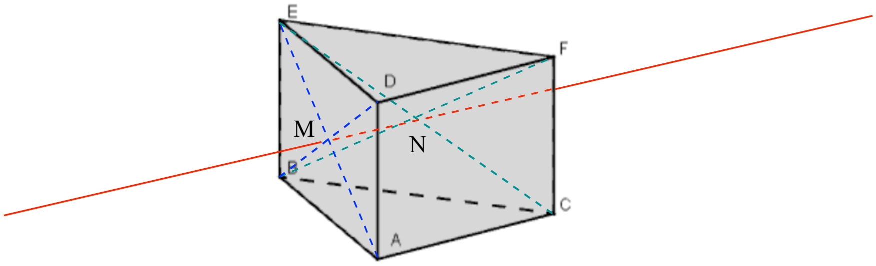
   Or la symétrie centrale conserve les longueurs et les mesures d'angles.
   Donc AF = BF = AD = BD.
   On en déduit que ADBF est un losange.
   De plus, on sait que $\widehat{ADB}$ = 90°.
   Or un losange qui possède un angle droit est un carré.
   Donc ADBF est un carré.

6. Démontrer que les points A, B, C, D et F appartiennent à un même cercle de centre E. Préciser le rayon.
   Comme ADBF est un carré, ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.
   Donc EA = ED = EB = EF.
   $EA=\frac{AB}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$
   On en déduit que les points A, D, B et F appartiennent au cercle de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.
   $EC=\sqrt{(0-1)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$
   On en déduit que le point C appartient lui aussi au cercle de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 4 :

ABCDEF est un prisme droit de base triangulaire ABC et de dimensions :

$AB = AC = 4$ cm $\quad BC = 4\sqrt{3}$ cm $\quad BE = 6$ cm



1. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.
   Dans le triangle ABC, le plus grand côté est [BC].
   D'une part : $BC^2 = (4\sqrt{3})^2 = 4^2\sqrt{3}^2 = 16 \times 3 = 48$
   D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$
   Donc : $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$
   On en déduit, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, que le triangle ABC n'est pas rectangle.
2. On note H le point de [BC] tel que [AH] soit une hauteur du triangle ABC.

   a) Montrer que la longueur AH mesure 2 cm.
   Puisque $AB = AC = 4$, le triangle ABC est isocèle en A.
   Dans un triangle isocèle, la hauteur et la médiane issues du sommet principal sont confondues.
   On en déduit que H est le milieu de [BC] et que par conséquent : $BH = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{3}$
   Le triangle AHB est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore :
   $AB^2 = AH^2 + BH^2$
   $4^2 = AH^2 + (2\sqrt{3})^2$
   $16 = AH^2 + 12$
   $AH^2 = 16 - 12 = 4$
   AH étant une longueur, on en déduit $AH \geq 0$ et $AH = \sqrt{4} = 2$

   b) On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.
   $\mathcal{A} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{4\sqrt{3} \times 2}{2} = 4\sqrt{3}$ cm²

   c) On note $\mathcal{V}_1$ le volume du prisme ABCDEF.
   $\mathcal{V}_1 = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \mathcal{A} \times BE = 4\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}$ cm³

   d) On note $\mathcal{V}_2$ le volume du tétraèdre ABCD.
   $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times AD = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 6 = 8\sqrt{3}$ cm³
3. Soit I un point de [AD]. Déterminer en justifiant la position relative des droites (BC) et (EI).
   Puisque ABCDEF est un prisme droit, la droite (AD) est strictement parallèle au plan (BCE).
   Or I est un point de [AD] donc I n'appartient pas au plan (BCE).
   On en déduit que les points B, C, E et I ne sont pas coplanaires, tout comme les droites (BC) et (EI).
4. Soit M le point d'intersection des droites (AE) et (BD).

   a) Montrer que M appartient à l'intersection des plan (BDF) et (ACE).
   On sait que : $M \in (AE)$ et $(AE) \subset (ACE)$ donc $M \in (ACE)$
   De même : $M \in (BD)$ et $(BD) \subset (BDF)$ donc $M \in (BDF)$
   Ainsi, M appartient à l'intersection des plans (BDF) et (ACE).

   b) Déterminer l'intersection des plans (BDF) et (ACE).
   Soit N le point d'intersection des droites (BF) et (EC).
   On sait que : $N \in (BF)$ et $(BF) \subset (BDF)$ donc $N \in (BDF)$
   De même : $N \in (EC)$ et $(EC) \subset (ACE)$ donc $N \in (ACE)$
   Ainsi, N appartient à l'intersection des plans (BDF) et (ACE), tout comme le point M.
   Les plans (BDF) et (ACE) n'étant pas confondus, ils sont sécants selon la droite (MN).