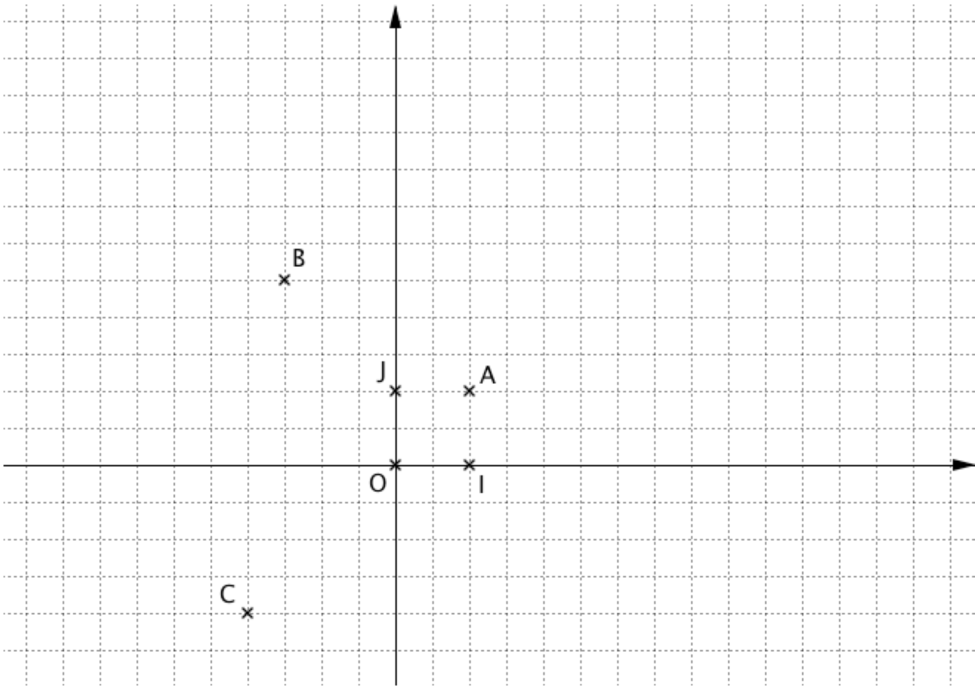
Nom : … *Classe* : 2^{nde} …	**Devoir commun n°1** le 17/01/2018	*Note* : … / 25

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le sujet devra être rendu.

Exercice 1 : **… / 6,5 points**

On se place dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-dessous.



1. Donner les coordonnées des points A, B et C.
2. Calculer les coordonnées de milieu K de [BC].
3. Calculer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
4. On pose $E(3;-1)$ et on admet que $F(4;4)$ est le symétrique de C par rapport à A.

   a) Placer les points K, D, E et F.

   b) Quelle est la nature du triangle AEF ? Justifier.
5. On considère l'algorithme suivant, écrit en langage python :

```python
x=float(input("x="))
y=-0.6*x+1.6
print("y=",y)
```

   Cet algorithme permet de déterminer l'ordonnée y d'un point de la droite (AB) sachant son abscisse x.

   a) Tester le fonctionnement de l'algorithme avec les coordonnées de A. Puis avec celles de B.

   b) Calculer les coordonnées du point d'intersection G de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées.

Exercice 2 : … / 6 points

Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé. On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard. La mesure de leurs diamètres, à $0,1$ mm près, a donné :

Diamètres	24,3	24,4	24,5	24,6	24,7	24,8	24,9	25	25,1	25,2	25,3	25,4	25,5	25,6	25,7
Effectifs	2	4	8	7	13	16	11	8	6	9	5	4	4	2	1
Effectifs cumulés croissants															

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. Calculer la moyenne $\bar{x}$, la médiane M_e, les quartiles Q_1 et Q_3 de cette série.
3. Compléter les phrases suivantes :
   - 69 % des cylindres ont un diamètre inférieur ou égal à ……… mm.
   - …… % des cylindres ont un diamètre supérieur ou égal à $25,3$ mm.
   - Au moins un quart des cylindres ont un diamètre inférieur ou égal à ……… mm.
4. On estime que la machine fonctionne correctement si les 3 critères suivants sont respectés :
   - $Q_3 - Q_1$ est inférieur à 2 % de la moyenne ;
   - L'écart entre la moyenne et la médiane est inférieur à $0,1$.
   - Au moins 90 % des diamètres sont dans l'intervalle : $[\bar{x} - 0,5 ; \bar{x} + 0,5]$.

   Peut-on considérer que cette machine fonctionne correctement ?

Exercice 3 : … / 6,5 points

Un grossiste, qui se fournit directement auprès d'un producteur asiatique, conditionne et commercialise du thé aromatisé. Chaque semaine, sa production est limitée à 13 tonnes.

Partie A : La recette

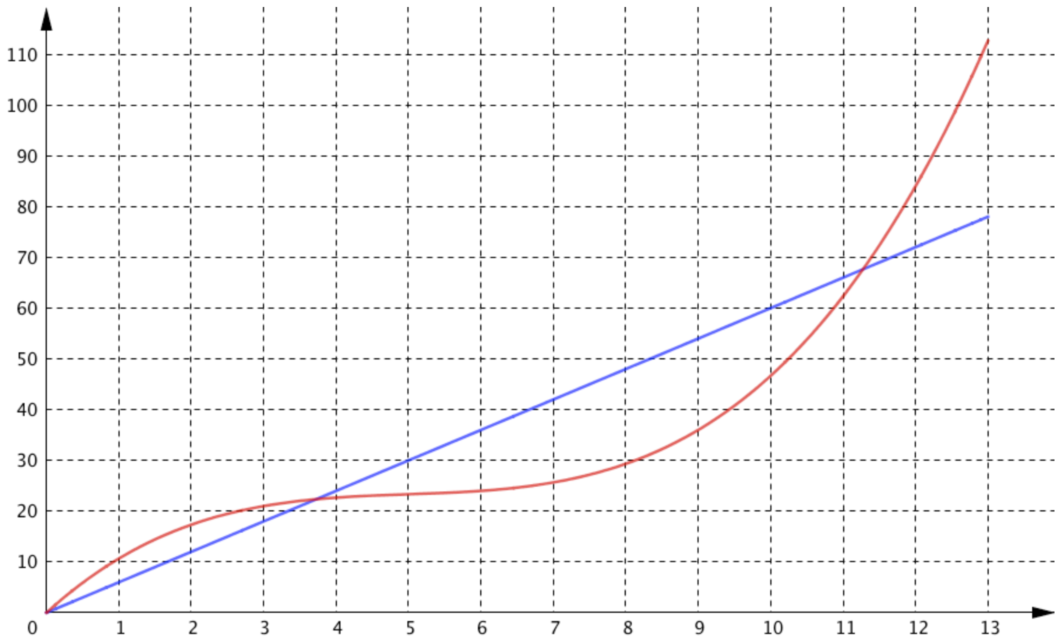
L'entreprise vend son produit 6000 € la tonne.
Pour x tonnes vendues, on note $R(x)$ sa recette en milliers d'euros.

1. Justifier que $x \in [0 ; 13]$.
2. Justifier que $R(x) = 6x$.

Partie B : Le coût de production

Pour x tonnes de thé aromatisé conditionné en une semaine, on note $C(x)$ le coût de production en milliers d'euros. On estime que $C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 13x$.

On affiche ci-dessous les courbes des fonctions R et C dans un repère orthogonal.



Fenêtre d'affichage : $0 \leq x \leq 14$ pas : 1 et : $0 \leq y \leq 120$ pas : 10

1. Identifier les courbes des fonctions R et C.
2. Résoudre graphiquement :
   - $R(x) = 30$
   - $R(x) \geq 60$

   Vous laisserez apparents les traits de construction qui conduisent à identifier les réponses sur la figure.
3. Résoudre graphiquement et interpréter les résultats obtenus , dans le contexte de l'exercice :
   - $R(x) > C(x)$
   - $R(x) \leq C(x)$

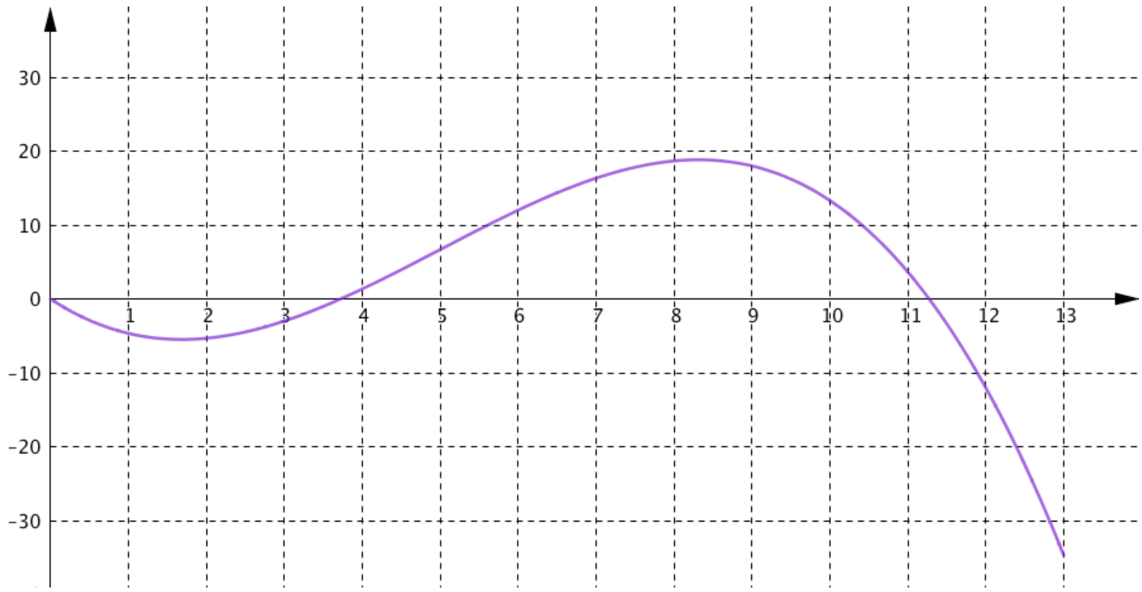
   Vous laisserez apparents les traits de construction qui conduisent à identifier les réponses sur la figure.

<u>Partie C</u> : Le bénéfice

Pour x tonnes conditionnées et vendues en une semaine, le bénéfice en milliers d'euros est donné par :

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction B ainsi que le tableau des valeurs de $B(x)$ sur $[0\ ;13]$ avec un pas égal à $0,5$.



	A	B
1	x	B(x)
2	0	0
3	0,5	-2,89583
4	1	-4,66667
5	1,5	-5,4375
6	2	-5,33333
7	2,5	-4,47917
8	3	-3
9	3,5	-1,02083
10	4	1,33333
11	4,5	3,9375
12	5	6,66667
13	5,5	9,39583
14	6	12
15	6,5	14,3542
16	7	16,3333
17	7,5	17,8125
18	8	18,6667
19	8,5	18,7708
20	9	18
21	9,5	16,2292
22	10	13,3333
23	10,5	9,1875
24	11	3,66667
25	11,5	-3,35417
26	12	-12
27	12,5	-22,3958
28	13	-34,6667

1. Déduire de la lecture de ces deux documents le tableau de variation de B.
2. Estimer quel est le maximum pour la fonction B et pour quelle valeur de x il est atteint. Interpréter ces deux valeurs dans le contexte de l'exercice.
3. On dit qu'une entreprise est bénéficiaire lorsque le bénéfice est positif. Estimer les quantités de thé qu'il faut vendre pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

Tourner la page →

Exercice 4 : … / 6 points

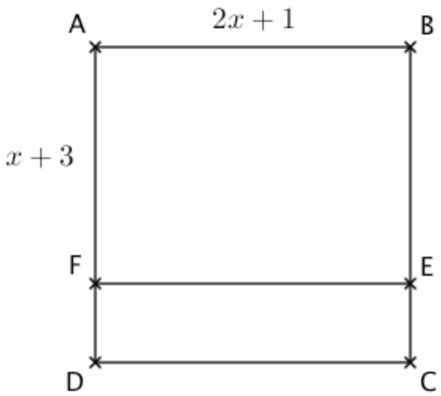
Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[2\ ; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

1. Calculer les images de 3, $\sqrt{5}$ et $\frac{11}{3}$.
2. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 2, on a $f(x) = (2x+1)(x-2)$.

Partie B : Application à l'étude d'une figure.

Sur la figure dessinée ci-dessous, ABCD est un carré et ABEF un rectangle. On pose :
AB = BC = $2x+1$ et AF = $x+3$ où x désigne un nombre réel supérieur ou égal à 2.
L'unité de longueur est le centimètre.



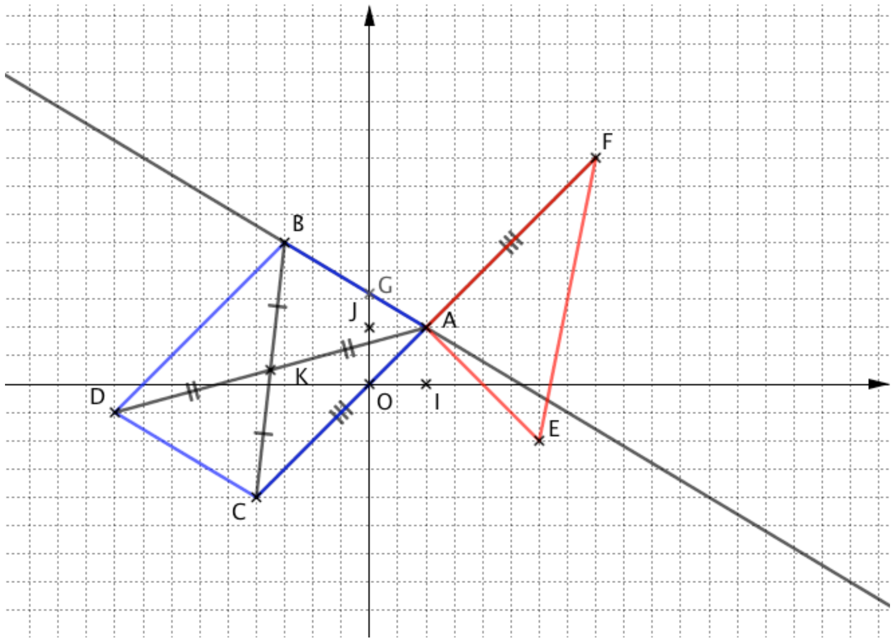
1. Que se passe-t-il sur la figure dans le cas $x = 2$?
2. On admet par la suite que x est strictement supérieur à 2.

   a) Exprimer FD en fonction de x.

   b) Exprimer l'aire de ABCD puis celle de ABEF en fonction de x. Développer les résultats.
3. Justifier que l'aire du rectangle FECD est égale à $f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.
4. On suppose que $x = 3$. Comparer les aires des rectangles ABEF et FECD.

Correction du DC n°1

Exercice 1 : On se place dans le repère orthonormé (O,I,J) ci-dessous.



1. Graphiquement, on lit :

   $A(1\,;\,1)$

   $B(-1{,}5\,;\,2{,}5)$

   $C(-2\,;\,-2)$.

2. K est le milieu de [BC] donc :

   $x_K = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{-1{,}5-2}{2} = \frac{-3{,}5}{2}$

   $x_K = \frac{-7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{-7}{4}$

   $y_K = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{2{,}5-2}{2} = \frac{0{,}5}{2}$

   $y_K = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3. Si ABDC est un parallélogramme alors ses diagonales [BC] et [AD] ont le même milieu K.

   On en déduit : $x_K = \frac{x_A+x_D}{2}$ et : $y_K = \frac{y_A+y_D}{2}$

   $2\,x_K = x_A + x_D$ $\quad$ $2\,y_K = y_A + y_D$

   $x_D = 2\,x_K - x_A$ $\quad$ $y_D = 2\,y_K - y_A$

   $x_D = 2 \times \frac{-7}{4} - 1$ $\quad$ $y_D = 2 \times \frac{1}{4} - 1$

   $x_D = \frac{-7}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-9}{2} = -4,5$ $\quad$ $y_D = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5$

4. On pose $E(3;-1)$ et on admet que $F(4;4)$ est le symétrique de C par rapport à A.

   a) Les points K, D, E et F sont placés sur la figure ci-dessus.

   b) Pour déterminer la nature du triangle AEF on calcule les carrés de ses longueurs :

   $AE^2 = (x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2 = (3-1)^2 + (-1-1)^2 = 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8$

   $AF^2 = (x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2 = (4-1)^2 + (4-1)^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

   $EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 = (4-3)^2 + (4+1)^2 = 1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26$

   On a : $AE^2 + AF^2 = 8 + 18 = 26 = EF^2$

   Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en A.

5. On considère l'algorithme suivant, écrit en langage python :

```
x=float(input("x="))
y=-0.6*x+1.6
print("y=",y)
```

   Cet algorithme permet de déterminer l'ordonnée y d'un point de la droite (AB) sachant son abscisse x.

   a) On teste le fonctionnement de l'algorithme avec les coordonnées de A. Puis avec celles de B.

   Si x = $x_A = 1$ $\quad$ Alors y = $-0,6 \times 1 + 1,6 = -0,6 + 1,6 = 1 = y_A$

   En entrant l'abscisse de A, l'algorithme affiche en sortie l'ordonnée de A.

   Si x = $x_B = -1,5$ $\quad$ Alors y = $-0,6 \times -1,5 + 1,6 = 0,9 + 1,6 = 2,5 = y_B$

   En entrant l'abscisse de B, l'algorithme affiche en sortie l'ordonnée de B.

   b) Le point G d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées a pour abscisse 0.

   $y_G = -0,6 \times 0 + 1,6 = 0 + 1,6 = 1,6$

   Le point G a donc pour coordonnées $G(0\,;\,1,6)$.

Exercice 2 :

Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé. On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard. La mesure de leurs diamètres, à $0,1$ mm près, a donné :

Diamètres	24,3	24,4	24,5	24,6	24,7	24,8	24,9	25	25,1	25,2	25,3	25,4	25,5	25,6	25,7
Effectifs	2	4	8	7	13	16	11	8	6	9	5	4	4	2	1
Effectifs cumulés croissants	2	6	14	21	34	50	61	69	75	84	89	93	97	99	100

1. Le tableau est complété.
2. Calcul des paramètres de la série :

   $\bar{x} = \frac{2\times24{,}3 + 4\times24{,}4 + 8\times24{,}5 + \ldots + 1\times25{,}7}{100} = 24,906$

   $N = 100$. N est pair et $\frac{N}{2} = 50$

   La médiane est la moyenne entre la 50ème et la 51ème valeur. $M_e = \frac{24{,}8+24{,}9}{2} = 24,85$

   $\frac{N}{4} = 25$

   Le 1er quartile est la 25ème valeur. $Q_1 = 24,7$.

   $\frac{3N}{4} = 75$

   Le 3ème quartile est la 75ème valeur. $Q_3 = 25,1$.
3. Compléter les phrases suivantes :
   - 69 % des cylindres ont un diamètre inférieur ou égal à 25 mm.
   - 16 % des cylindres ont un diamètre supérieur ou égal à $25,3$ mm.
   - Au moins un quart des cylindres ont un diamètre inférieur ou égal à $24,7$ mm.
4. On estime que la machine fonctionne correctement si les 3 critères suivants sont respectés :
   - $Q_3 - Q_1$ est inférieur à 2 % de la moyenne ;
   - L'écart entre la moyenne et la médiane est inférieur à $0,1$.
   - Au moins 90 % des diamètres sont dans l'intervalle : $[\bar{x} - 0,5 ; \bar{x} + 0,5]$.

   Peut-on considérer que cette machine fonctionne correctement ?

   La machine fonctionne correctement si les 3 critères sont respectés. On les vérifie :

   - On a : $Q_3 - Q_1 = 25,1 - 24,7 = 0,4$
     Et : $\frac{2}{100}\,\bar{x} = \frac{2}{100} \times 24,906 \approx 0,498$
     $Q_3 - Q_1 < \frac{2}{100}\,\bar{x}$ donc le 1er critère est respecté.
   - $\bar{x} - M_e = 24,906 - 24,85 = 0,056 < 0,1$
     Donc l'écart entre la moyenne et la médiane est inférieur à $0,1$. Le 2nd critère est respecté.
   - $[\bar{x} - 0,5 ; \bar{x} + 0,5] = [24,906 - 0,5 ; 24,906 + 0,5] = [24,406 ; 25,406]$
     Les diamètres compris dans cet intervalle sont ceux compris entre $24,5$ et $25,4$.
     On en compte 87. Ainsi 87 % des diamètres sont compris dans l'intervalle.
     Donc moins de 90 % des diamètres sont dans l'intervalle $[\bar{x} - 0,5 ; \bar{x} + 0,5]$.
     Le 3ème critère n'est pas respecté.

   Conclusion : La machine n'est pas correctement réglée.

Exercice 3 :

Un grossiste, qui se fournit directement auprès d'un producteur asiatique, conditionne et commercialise du thé aromatisé. Chaque semaine, sa production est limitée à 13 tonnes.

Partie A : La recette

L'entreprise vend son produit 6000 € la tonne.
Pour x tonnes vendues, on note $R(x)$ sa recette en milliers d'euros.

1. Justifier que $x \in [0\,;13]$.

x désigne la quantité de thé commercialisé chaque semaine, en tonnes.
On sait que cette quantité est positive et limitée à 13 tonnes. Donc $x \in [0\,;13]$.

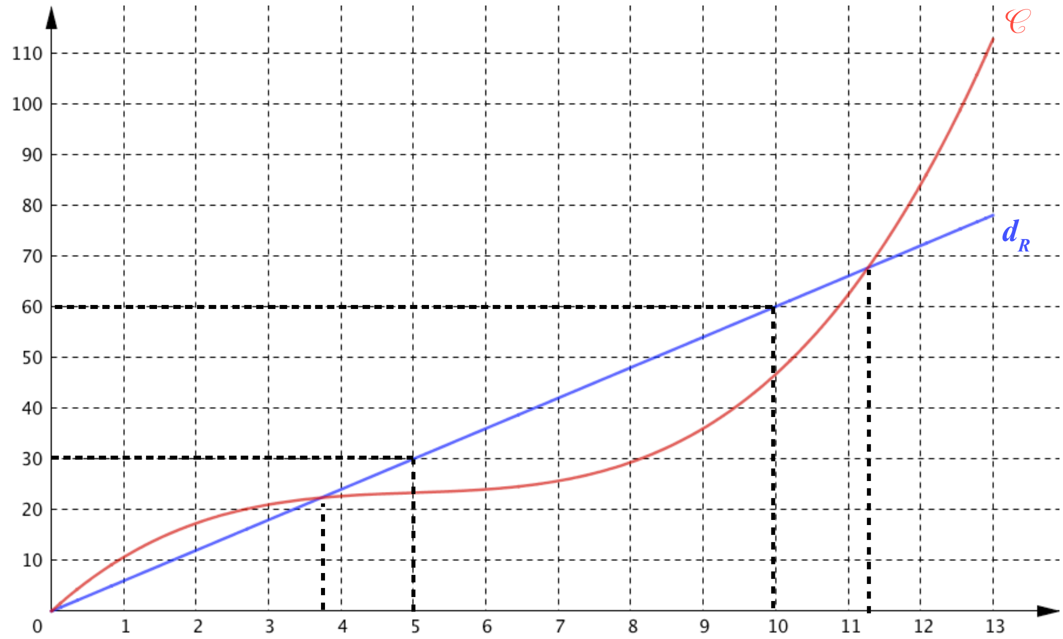
2. Justifier que $R(x) = 6x$.

$R(x)$ désigne la recette réalisée par l'entreprise, en milliers d'euros.
On sait que le thé est commercialisé au prix de 6 mille euros la tonne. Donc $R(x) = 6x$.

Partie B : Le coût de production

Pour x tonnes de thé aromatisé conditionné en une semaine, on note $C(x)$ le coût de production en milliers d'euros. On estime que $C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 13x$.

On affiche ci-dessous les courbes des fonctions R et C dans un repère orthogonal.



Fenêtre d'affichage : $0 \leq x \leq 14$ pas : 1 et : $0 \leq y \leq 120$ pas : 10

1. Identifier les courbes des fonctions R et C.

La fonction R, définie sur $[0\,;13]$ par $R(x) = 6x$ est une fonction affine (et linéaire).
Sa représentation graphique est celle d'une droite (qui passe par l'origine du repère).
On en déduit que R est représentée graphiquement par la droite, notée d_R et que la fonction C est représentée par la courbe, notée $\mathscr{C}$.

2. Résoudre graphiquement :
   - $R(x) = 30$
   - $R(x) \geq 60$

   Vous laisserez apparents les traits de construction qui conduisent à identifier les réponses sur la figure.

Graphiquement :

- $R(x) = 30 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$
- $R(x) \geq 60 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [10\,;13]$

3. Résoudre graphiquement et interpréter les résultats obtenus , dans le contexte de l'exercice :
   - $R(x) > C(x)$
   - $R(x) \leq C(x)$

   Vous laisserez apparents les traits de construction qui conduisent à identifier les réponses sur la figure.

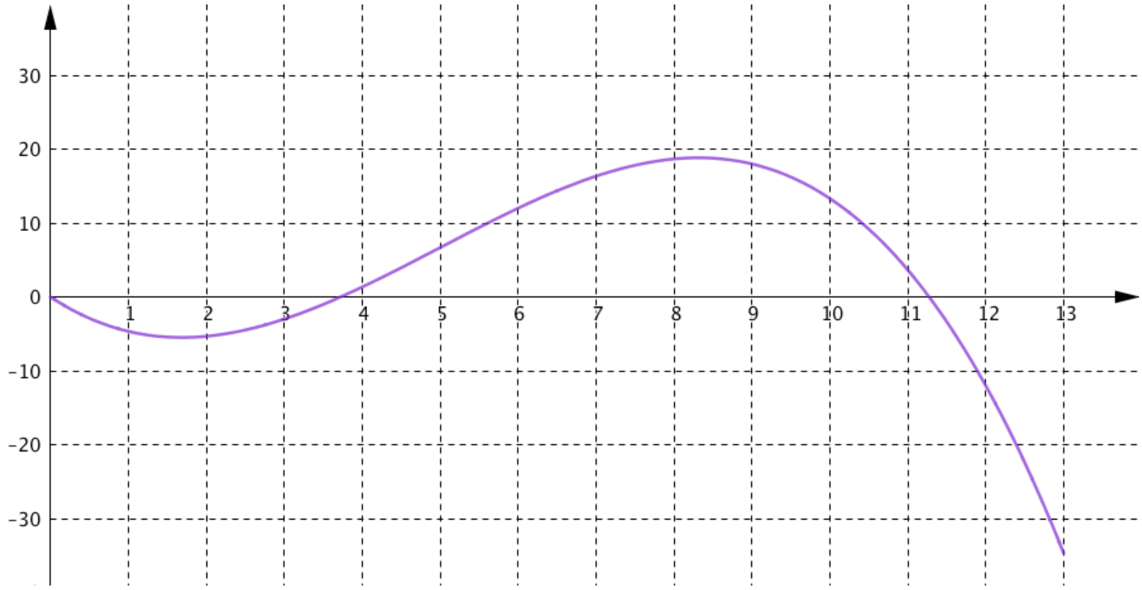
Graphiquement, et avec la précision permise par le graphique :
- $R(x) > C(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]3,7\,;11,3[$
- $R(x) \leq C(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0\,;3,7] \cup [11,3\,;13]$

<u>Partie C</u> : Le bénéfice

Pour x tonnes conditionnées et vendues en une semaine, le bénéfice en milliers d'euros est donné par :

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction B ainsi que le tableau des valeurs de $B(x)$ sur $[0\,;13]$ avec un pas égal à $0,5$.



	A	B
1	x	B(x)
2	0	0
3	0,5	-2,89583
4	1	-4,66667
5	1,5	-5,4375
6	2	-5,33333
7	2,5	-4,47917
8	3	-3
9	3,5	-1,02083
10	4	1,33333
11	4,5	3,9375
12	5	6,66667
13	5,5	9,39583
14	6	12
15	6,5	14,3542
16	7	16,3333
17	7,5	17,8125
18	8	18,6667
19	8,5	18,7708
20	9	18
21	9,5	16,2292
22	10	13,3333
23	10,5	9,1875
24	11	3,66667
25	11,5	-3,35417
26	12	-12
27	12,5	-22,3958
28	13	-34,6667

1. Déduire de la lecture de ces deux documents le tableau de variation de B.

x	0		$1,5$		$8,5$		13
$B(x)$	0	$\searrow$	$-5,4375$	$\nearrow$	$18,7708$	$\searrow$	$-34,6667$

2. Le maximum pour la fonction B semble être $18,7708$.
   Il semble atteint en $x = 8{,}5$.
   Cela signifierait que l'entreprise réalise un bénéfice maximum de $18770,80$ €
   lorsqu'elle vend 8,5 tonnes de thé.

3. Pour savoir quand le bénéfice est positif on résout $B(x) > 0$.
   Graphiquement, cela revient à déterminer les abscisses des points de la courbe représentative de B qui sont situés au dessus de l'axe des abscisses.
   $B(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]3,7\,;11,3[$
   On peut donc estimer que l'entreprise doit vendre entre $3,7$ et $11,3$ tonnes de thé pour être bénéficiaire.

   <u>Remarque</u> : On retrouve les valeurs trouvées à la question 3 de la partie B, entre lesquelles la recette R est supérieure au coût de production C.

<u>Exercice 4</u> :

<u>Partie A</u> : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

1. Calculer les images de 3, $\sqrt{5}$ et $\frac{11}{3}$.

   $f(3) = 2 \times 3^2 - 3 \times 3 - 2 = 2 \times 9 - 9 - 2 = 18 - 11 = 7$

   $f(\sqrt{5}) = 2 \times \sqrt{5}^2 - 3 \times \sqrt{5} - 2 = 2 \times 5 - 3\sqrt{5} - 2 = 10 - 3\sqrt{5} - 2 = 8 - 3\sqrt{5}$

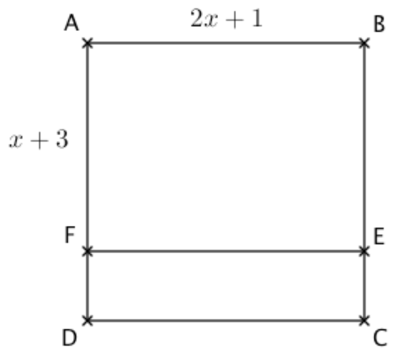
   $f(\frac{11}{3}) = 2 \times (\frac{11}{3})^2 - 3 \times \frac{11}{3} - 2 = 2 \times \frac{121}{9} - 11 - 2 = \frac{242}{9} - 13 = \frac{242}{9} - \frac{117}{9} = \frac{125}{9}$

2. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 2, on a $f(x) = (2x+1)(x-2)$.

   $\forall\, x \in [2\,;+\infty[$, $(2x+1)(x-2) = 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 3x - 2 = f(x)$

<u>Partie B</u> : Application à l'étude d'une figure.

Sur la figure dessinée ci-dessous, ABCD est un carré et ABEF un rectangle. On pose :
AB = BC = $2x+1$ et AF = $x+3$ où x désigne un nombre réel supérieur ou égal à 2.
L'unité de longueur est le centimètre.



1. Que se passe-t-il sur la figure dans le cas $x = 2$?

   Si $x = 2$ alors :
   - AF = $x + 3 = 2 + 3 = 5$
   - AB = $2x + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$

   Dans ce cas, ABEF est un carré, confondu avec ABCD.
   Les points F et D sont alors confondus.

2. On admet par la suite que x est strictement supérieur à 2.

   a) Exprimer FD en fonction de x.

   Les points A, F et D étant alignés dans cet ordre, on a :
   FD = AD – AF = $2x + 1 - (x + 3) = 2x + 1 - x - 3 = x - 2$

   b) Exprimer l'aire de ABCD puis celle de ABEF en fonction de x. Développer les résultats.

   On note $\mathscr{A}_{\text{ABCD}}$ et $\mathscr{A}_{\text{ABEF}}$ les aires respectives de ABCD et ABEF.

   ABCD est un carré donc : $\mathscr{A}_{\text{ABCD}} = \text{AB}^2 = (2x+1)^2$
   On développe en appliquant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   $\mathscr{A}_{\text{ABCD}} = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$

   ABEF est un rectangle donc :
   $\mathscr{A}_{\text{ABEF}} = \text{AB} \times \text{AF} = (2x+1)(x+3) = 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$

3. Justifier que l'aire du rectangle FECD est égale à $f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.

   On note $\mathscr{A}_{\text{FECD}}$ l'aire du rectangle FECD.
   $\mathscr{A}_{\text{FECD}} = \mathscr{A}_{\text{ABCD}} - \mathscr{A}_{\text{ABEF}} = 4x^2 + 4x + 1 - (2x^2 + 7x + 3)$
   $\mathscr{A}_{\text{FECD}} = 4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 - 7x - 3 = 2x^2 - 3x - 2 = f(x)$

4. On suppose que $x = 3$. Comparer les aires des rectangles ABEF et FECD.

   On sait que $\mathscr{A}_{\text{FECD}} = f(x)$ et, d'après le calcul fait en partie A, $f(3) = 7$.
   On en déduit que si $x = 3$ alors le rectangle FECD a pour aire 7 cm^2.

   De plus, $\mathscr{A}_{\text{ABEF}} = 2x^2 + 7x + 3$
   Si $x = 3$ alors : $\mathscr{A}_{\text{ABEF}} = 2 \times 3^2 + 7 \times 3 + 3 = 2 \times 9 + 21 + 3 = 18 + 24 = 42$ cm^2.

   Donc, si $x = 3$ alors $\mathscr{A}_{\text{ABEF}} > \mathscr{A}_{\text{FECD}}$