Nom : … Classe : 2^{nde} …	**Devoir commun n°1** le 17/01/2019	Note : … / 25

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le sujet devra être rendu.

Exercice 1 : **… / 6,5 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+1)(6x-9)-(2x-3)^2$

1. Démontrer que $f(x) = 14x^2-9x-18$
2. a) Factoriser $6x-9$

   b) En déduire que $f(x) = (2x-3)(7x+6)$
3. Calculer $f(\frac{3}{2})$ et $f(\sqrt{2})$ en écrivant toutes les étapes de calculs.

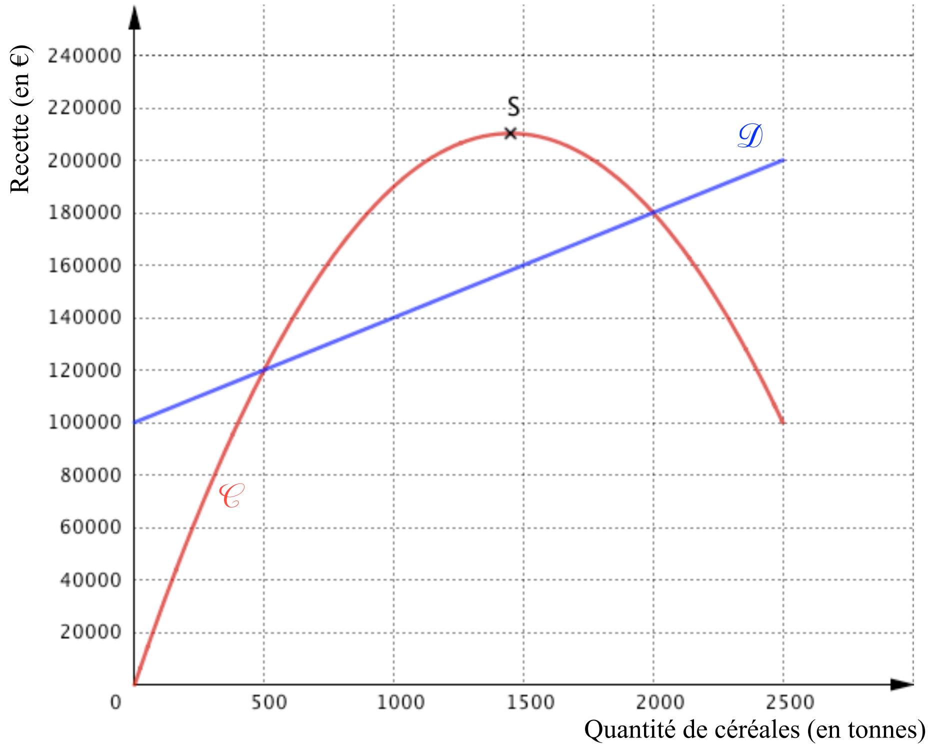
Partie B :

Soit A = $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2$

1. Montrer que A = $3x^2+2$
2. Résoudre A = 4802
3. Déterminer trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme des carrés est 4802.

Exercice 2 : **… / 5 points**

Une exploitation agricole produit entre 0 et 2500 tonnes de céréales. On suppose que toute la production est vendue. La recette, en euros, en fonction de la quantité produite (en tonnes) est donnée par la fonction f de courbe représentative $\mathscr{C}$. Le coût de production, en euros, en fonction de la quantité produite (en tonnes) est donné par la fonction g, représentée par la droite $\mathscr{D}$. On note x la quantité de céréales produites.



1. Avec la précision permise par le graphique, résoudre graphiquement :

   a) $g(x) > 160000$ b) $f(x) > g(x)$

2. En déduire une estimation des quantités à produire pour que :

   a) Le coût de production dépasse 160000 €.

   b) La production soit rentable.

3. On désigne par $S(1450\ ;\ 210250)$ le sommet de la courbe $\mathscr{C}$. Dresser le tableau de variation de f.

4. Le bénéfice obtenu par l'exploitation agricole est donné par la fonction B dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	0	1250	2500
$B(x)$	…	56250	…

   a) Quel est le bénéfice maximal que peut gagner l'exploitation ? Pour quelle quantité de céréales ?

   b) On rappelle que le bénéfice est obtenu en calculant la différence entre la recette et le coût de production. Ainsi $B(x) = f(x) - g(x)$. Compléter le tableau de variation de f ci-dessus.

5. On admet dans cette question que $B(x) = -0,1x^2 + 250x - 100000$ et on considère le programme suivant, écrit en Python :

```python
x=float(input("Quelle est la quantité de céréales?"))
B(x)=-0.1*x**2+250*x-100000
if B(x)>0:
    print("L'exploitation agricole réalise un bénéfice.")
else:
    print("L'exploitation agricole est déficitaire.")
```

   a) Que permet de faire ce programme ?

   b) Quel est le résultat affiché lorsqu'on saisit 1000 comme valeur de x ? Justifier.

Exercice 3 : Les cigognes sont passées. **… / 6,5 points**

Dans cet exercice les tailles sont exprimées en centimètre. Les valeurs calculées seront arrondies au dixème.

Partie A : A la maternité « Beaux jours »

Sur la totalité du mois de décembre 2018, il y a eu 57 nouveau-nés à la maternité « Beaux jours ».
Leur taille est donnée dans le tableau ci-dessous.

Tailles (en cm)	46	47,5	48	48,5	49	49,5	50	50,5	51	51,5	52	52,5	53
Effectifs	1	2	3	5	5	7	9	8	7	5	2	2	1

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ puis la médiane M_e des tailles de ces 57 nouveau-nés en précisant la démarche.
2. Parmi toutes ces tailles, déterminer la plus petite taille t telle qu'au moins les trois quarts des nouveau-nés ont une taille inférieure ou égale à t cm. Quel paramètre de la série des tailles a ainsi été trouvé ?
3. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

Minimum	Maximum	Moyenne	Médiane	1er Quartile	3ème quartile

4. Calculer la fréquence (en %) des nouveau-nés ayant une taille dans l'intervalle $[\bar{x}-1,4\ ;\ \bar{x}+1,4]$.

Partie B : A la maternité « Bon accueil »

L'étude statistique de la taille des 64 nouveau-nés durant le même mois de décembre 2018 à la maternité « Bon accueil » a donné les résultats suivants :

Minimum	Maximum	Moyenne	Médiane	1er Quartile	3ème quartile
46	53	49,3	49	48	50,5

1. Des deux maternités, une seule possède un service pour les naissances prématurées.
Un enfant prématuré est né avant le terme et est généralement plus petit qu'un enfant arrivé à terme.
D'après les résultats obtenus dans la partie A et ceux indiqués dans le tableau ci-dessus, quelle maternité vous semble posséder le service des prématurés ? Justifier votre réponse.
2. Les deux maternités sont les seules de la ville. Calculer la moyenne des tailles des nouveau-nés, en décembre 2018, sur l'ensemble des naissances dans les maternités de cette ville.

Exercice 4 : **… / 7 points**

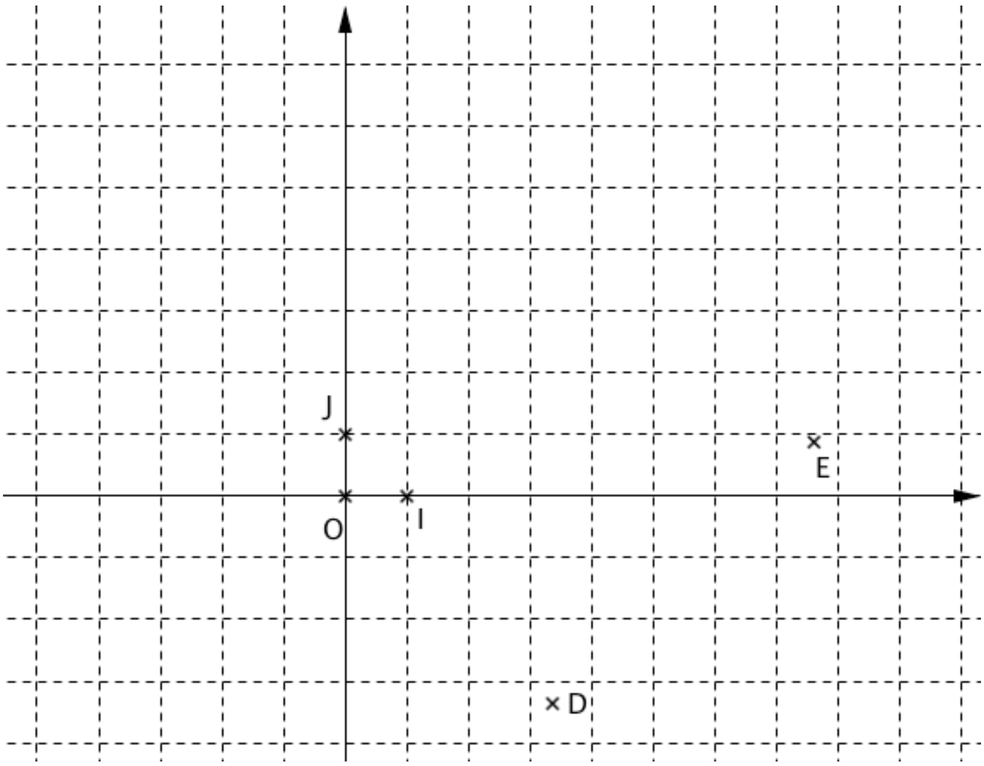
1. Placer les points $A(2\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 5)$ et $C(-3\ ;\ 3)$ dans le repère orthonormé ci-dessous.
   Vous complèterez la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
3. Calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{ACB}$ au dixième près.
4. On note $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

   a) Justifier que son centre Ω a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2})$ puis déterminer la valeur exacte du rayon r.

   b) On admet que O est le symétrique de B par rapport à Ω. Déterminer la nature du quadrilatère OABC.
5. On admet ici que $CA = \sqrt{26}$, $CO = \sqrt{18}$

   a) Justifier, en détaillant le calcul, que $CO = 3\sqrt{2}$

   b) On note D le point de [CO) tel que CD = 9 et E le point de [CA) tel que $CE = 3\sqrt{13}$.
   Les droites (OA) et (DE) sont elles parallèles ? Justifier.



Devoir commun n°1
Correction

Exercice 1 :
Partie A :

1. $f(x)=(3x+1)(6x-9)-(2x-3)^2$
$f(x)=3x\times 6x-3x\times 9+1\times 6x-1\times 9-((2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2)$
$f(x)=18x^2-27x+6x-9-(4x^2-12x+9)$
$f(x)=18x^2-21x-9-4x^2+12x-9$
$f(x)=14x^2-9x-18$

2. a) $6x-9=3(2x-3)$

b) $f(x)=(3x+1)(6x-9)-(2x-3)^2$
$f(x)=(3x+1)\times 3(2x-3)-(2x-3)^2$
$f(x)=(2x-3)[(3x+1)\times 3-(2x-3)]$
$f(x)=(2x-3)(9x+3-2x+3)$
$f(x)=(2x-3)(7x+6)$

3. $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(2\times\frac{3}{2}-3\right)\left(7\times\frac{3}{2}+6\right)$
$f\left(\frac{3}{2}\right)=(3-3)\left(\frac{21}{2}+6\right)$
$f\left(\frac{3}{2}\right)=0\times\left(\frac{21}{2}+6\right)$
$f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

$f(\sqrt{2})=14\times(\sqrt{2})^2-9\sqrt{2}-18$
$f(\sqrt{2})=14\times 2-9\sqrt{2}-18$
$f(\sqrt{2})=28-9\sqrt{2}-18$
$f(\sqrt{2})=10-9\sqrt{2}$

Partie B :

1. $\mathrm{A}=(x-1)^2+x^2+(x+1)^2$
$\mathrm{A}=x^2-2\times x\times 1+1^2+x^2+x^2+2\times x\times 1+1^2$
$\mathrm{A}=x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1$
$\mathrm{A}=3x^2+2$

2. A = 4802
$3x^2+2=4802$
$3x^2=4800$
$x^2=\frac{4800}{3}$
$x^2=1600$
Cette équation admet deux solutions :
$x=\sqrt{1600}$ et $x=-\sqrt{1600}$
$x = 40$ et $x = - 40$

3. D'après la question précédente, l'équation $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=4802$ admet deux solutions, qui sont -40 et 40. -40 est un nombre négatif et ne convient donc pas pour répondre à la question. On en déduit que 39, 40 et 41 sont trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme des carrés est 4802.

Exercice 2 :

1. a. $S =]1500\,;2500]$
   b. $S =]500\,;2000[$
2. a. Le coût de production dépasse 160000 € quand l'exploitation produit entre 1500 et 2500 tonnes de céréales.
   b. La production est rentable si la recette est supérieure au coût, c'est-à-dire si $f(x) > g(x)$, donc entre 500 et 2000 tonnes de céréales.
3. Tableau de variation de la fonction f

x	0		1450		2500
$f(x)$			210250		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				100000

4. a. Le bénéfice maximal que peut gagner l'exploitation est de 56250 € pour 1250 tonnes de céréales produites.
   b. Tableau de variation complété :

x	0		1250		2500
$B(x)$			56250		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-100000				-100000

5. a. Cet algorithme permet, en entrant la quantité de céréales produites, de savoir si l'entreprise va réaliser un bénéfice.
   b. Lorsque l'on saisit 1000, l'algorithme calcule le bénéfice, $B(1000) = 50000$ qui est strictement supérieur à 0. Ainsi, le résultat affiché est : L'exploitation agricole réalise un bénéfice.

<u>Exercice 3</u>: les cigognes sont passées :
Dans cet exercice les tailles sont exprimées en centimètre. Les valeurs calculées seront arrondies au dixième près.

Partie A : à la maternité « Beaux jours »

Sur la totalité du mois de décembre 2018, il y a eu 57 nouveau-nés à la maternité « Beaux jours ».
Leur taille est donnée dans le tableau ci-dessous.

Taille (en cm)	46	47,5	48	48,5	49	49,5	50	50,5	51	51,5	52	52,5	53
Effectifs	1	2	3	5	5	7	9	8	7	5	2	2	1

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ puis la médiane $\mathrm{M_e}$ des tailles de ces 57 nouveau-nés en précisant la démarche.

$\bar{x} = \frac{46x1+47,5x2+48x3+\cdots.+52,5x2+53x1}{1+2+3+5+\cdots+2+1} \approx$49,99≈50cm

L'effectif total N est égal à 57 qui est un nombre impair. $\frac{N+1}{2} = \frac{57+1}{2}$ =29.

La valeur médiane est égale à la 29$^{\text{ième}}$ valeur de la série. $\mathrm{M_e}$ = 50 cm

2. Parmi toutes ces tailles, déterminer la plus petite taille t telle qu'au moins les trois quarts des nouveau-nés aient une taille inférieure ou égale à t cm. Quel paramètre de la série des tailles a été ainsi trouvé ?

La plus petite taille t telle qu'au moins les trois quarts des nouveau-nés aient une taille inférieure ou égale à t cm correspond au troisième quartile.

$\frac{3}{4}$x N =$\frac{3}{4}$x 57 = 42,75 on en déduit que $\mathrm{Q_3}$ est la 43$^{\text{ième}}$ valeur. $\mathrm{Q_3}$=51cm

4. A l'aide de la calculatrice compléter le tableau ci-dessous :

Minimum	Maximum	Moyenne	Médiane	1$^{\text{er}}$ quartile	3$^{\text{e}}$ quartile
46	53	50	50	49	51

5. Calculer la fréquence (en %)des nouveau-nés ayant une taille dans l'intervalle [$\bar{x}$ −1.4 ; $\bar{x}$ +1.4]

[$\bar{x}$ −1.4 ; $\bar{x}$ +1.4] =[50-1,4 ;50+1,4]=[48,6,51,4]

Le nombre de bébés dont la taille appartient à cet intervalle correspond au nombre de bébés dont la taille appartient à l'intervalle [49 ; 51] .L'effectif correspondant est égal à 5+7+9+8+7 =36

La fréquence est égale à : $f = \frac{36}{57}$ ≈0,6316 ≈63,2%

Partie B : à la maternité « Bon accueil »

L'étude statistique de la taille des 64 nouveau-nés durant le même mois de décembre 2018 à la maternité « Bon accueil » a donné les résultats suivants :

Minimum	Maximum	Moyenne	Médiane	1$^{\text{er}}$ quartile	3$^{\text{e}}$ quartile
46	53	49,3	49	48	50,5

1. Des deux maternités, une seule possède un service pour les naissances prématurées.
D'après les résultats obtenus dans la partie A et ceux indiqués dans le tableau ci-dessus, quelle maternité vous semble posséder le service des prématurés ?

En utilisant les valeurs des premiers quartiles :

- Dans la maternité « Beaux jours » 25% des bébés ont une taille inférieure à 49 cm.
57x25% =14,25, à peu près 14 bébés ont une taille inférieure à 49cm.
- Dans la maternité « Bon accueil» 25% des bébés ont une taille inférieure à 48 cm.
64x25% =16, 16 bébés ont une taille inférieure à 48cm.

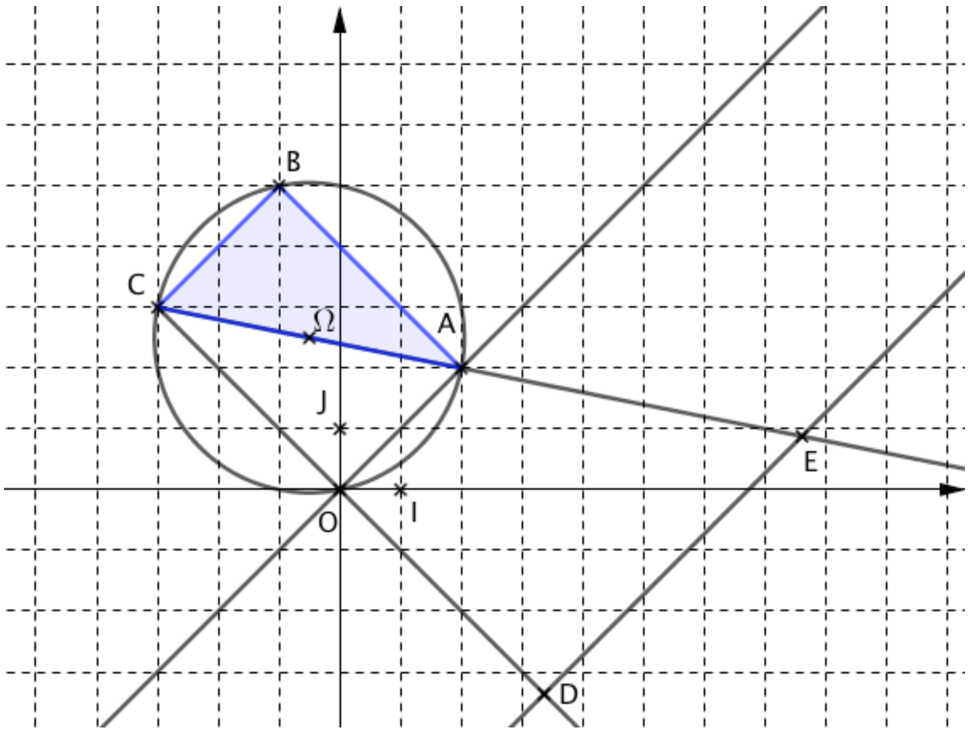
D'après ces deux éléments là, il semble que ce soit la maternité « Bon accueil » qui possède le service des prématurés.

2. Les deux maternités sont les seules de la ville. Calculer la moyenne des tailles des nouveau-nés, en décembre 2018, sur l'ensemble des naissances dans les maternités de cette ville.

$\bar{x} = \frac{50x57+49,3x64}{57+64} \approx$49,63≈49,6. La moyenne des tailles des nouveaux nés dans cette ville est de 49,6cm

Exercice 4 :

1. Placer les points A(2 ; 2), B(-1 ; 5) et C(-3 ; 3) dans le repère orthonormé ci-dessous.
   Vous complèterez la figure au fur et à mesure de l'exercice.



2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

AB = $\sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})^2} = \sqrt{(\text{-}1-2)^2+(5-2)^2} = \sqrt{(\text{-}3)^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
AC = $\sqrt{(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{A}})^2} = \sqrt{(\text{-}3-2)^2+(3-2)^2} = \sqrt{(\text{-}5)^2+1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$
BC = $\sqrt{(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{B}})^2+(y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{B}})^2} = \sqrt{(\text{-}3+1)^2+(3-5)^2} = \sqrt{(\text{-}2)^2+(\text{-}2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$
On a :

- D'une part : AB ^{2} + BC ^{2} = $\sqrt{18}^2+\sqrt{8}^2 = 18+8 = 26$
- D'autre part : AC ^{2} = $\sqrt{26}^2 = 26$

Donc : AC ^{2} = AB ^{2} + BC ^{2}
Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

3. Calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$ au dixième près.

Dans le triangle ABC rectangle en B on a :
$cos\ \widehat{\mathrm{ACB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{4}{13}}$
On en déduit, à l'aide de la touche cos^{-1} de la calculatrice : $\widehat{\mathrm{ACB}} \approx 56,3°$

4. On note $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

   a) Justifier que son centre Ω a pour coordonnées ($\text{-}\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$) puis déterminer la valeur exacte du rayon r.

Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est situé au milieu de l'hypoténuse.
On en déduit que Ω est le milieu de [AC].
$x_\Omega = \frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{C}}}{2} = \frac{2-3}{2} = \frac{\text{-}1}{2}$ $\qquad$ $y_\Omega = \frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{C}}}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$
De plus, le rayon du cercle circonscrit est la moitié de la longueur de l'hypoténuse. Ainsi : $r = \frac{\mathrm{AC}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

   b) On admet que O est le symétrique de B par rapport à Ω. Déterminer la nature du quadrilatère OABC.

O est le symétrique de B par rapport à Ω donc Ω est le milieu de [OB]. Ω est aussi le milieu de [AC].

Or, un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
Donc OABC est un parallélogramme.
De plus, on sait que le triangle ABC est rectangle en B.
Or, un parallélogramme qui possède un angle droit est un rectangle.
Donc OABC est un rectangle.

5. On admet ici que CA = $\sqrt{26}$, CO = $\sqrt{18}$

   a) Justifier, en détaillant le calcul, que CO = $3\sqrt{2}$

CO = $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

   b) On note D le point de [CO) tel que CD = 9 et E le point de [CA) tel que CE = $3\sqrt{13}$.
   Les droites (OA) et (DE) sont elles parallèles ? Justifier.

On sait que :

- Les points C, A et E sont alignés dans le même ordre que les points C, O et D.
- $\frac{CO}{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- $\frac{CA}{CE} = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{13}}{3\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\frac{CO}{CD} = \frac{CA}{CE}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (OA) et (DE) sont parallèles.