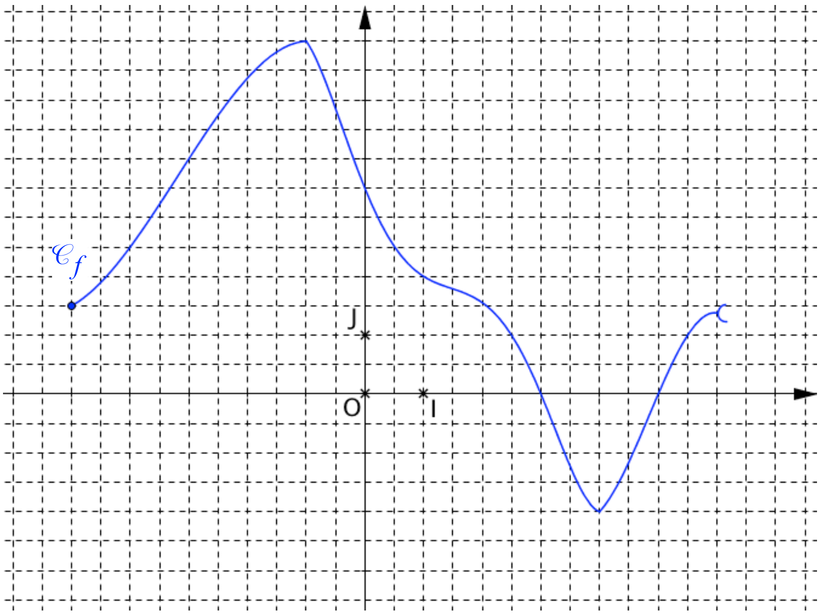
Nom : Classe : 2nde	**Devoir commun n°1** le 26/01/2016	Note : … / 30

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le sujet devra être rendu.
Le sujet étant un peu long, le barème inclus 3 points de bonus. La note sur 33 sera enregistrée sur 30.

Exercice 1 : Une fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère orthonormé (O,I,J). … / 9



1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer graphiquement l'image de 3 par la fonction f. Donner f (-3).
3) a) Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 1 par la fonction f.
   b) Déterminer, s'ils existent, les antécédents de -3 par la fonction f.
4) Etablir le tableau des variations de la fonction f.
5) a) Quel est le maximum de la fonction f sur [0 ; 6].
   Préciser la valeur de x pour laquelle il est atteint.
   b) Quel est le minimum de la fonction f sur son ensemble de définition.
   Préciser la valeur de x pour laquelle il est atteint.
6) On donne le tableau des variations d'une fonction g définie sur [-10 ; 10].

x	-10	-7	-1	0	4	5	10
g	0,1	2	0	-5	0	3	1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si le tableau ne permet pas de le savoir. Justifier chaque réponse.

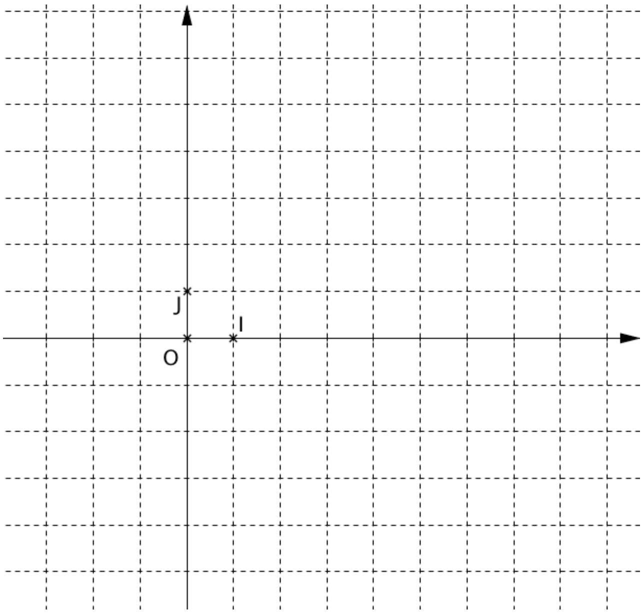
a) g (1) > g (3) b) g (-9) < g (-6) c) g (-6) < 2 d) g (2) > g (-8)

Exercice 2 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$. … / 9

1) a) Montrer que, pour tout réel x : $f(x) = (x+3)^2 - 4$.
   b) En déduire que, pour tout réel x : $f(x) = (x+1)(x+5)$.
2) a) Calculer les images de -3 et de -5 en utilisant à chaque fois la forme de $f(x)$ la plus adaptée.
   b) Déterminer les antécédents éventuels de 5.
   c) Résoudre $f(x) = 0$.
3) Résoudre $f(x) \geq f(-3)$. En déduire un extremum de f.
4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 8x + 13$. Résoudre $f(x) > g(x)$.
5) Ecrire un algorithme qui permet d'afficher l'image d'un réel x par la fonction g.

Exercice 3 : Le plan est rapporté au repère orthonormé (O , I , J). … / 9

1) Placer les points A (3 ; 2), B (1 ; -1), C (-2 ; 1) et D (-2 ; 2).
   Tu complèteras la figure au fur et à mesure que tu répondras aux questions de l'exercice.



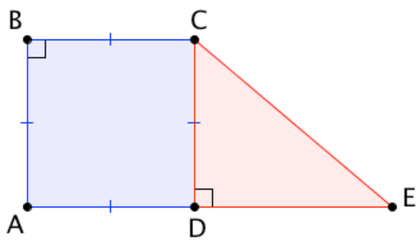
2) a) Démontrer que le triangle ACD est rectangle.
   b) En déduire les coordonnées du centre M de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$.

3) On admet que $\mathscr{C}$ a pour rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$. Soit E le symétrique de M par rapport à A.
   La parallèle à (BM) passant par E coupe la demi-droite [CB) en F.
   a) Justifier que CM = $\frac{1}{3}$CE.
   b) En déduire le calcul de EF.

4) a) Déterminer l'équation de la droite (AC).
   b) Donner les équations des droites (AD) et (CD). Aucune Justification n'est attendue.

Exercice 4 : … / 6

Frédéric et Gilles ont acheté deux parcelles de terrain voisines, dessinées ci-dessous :

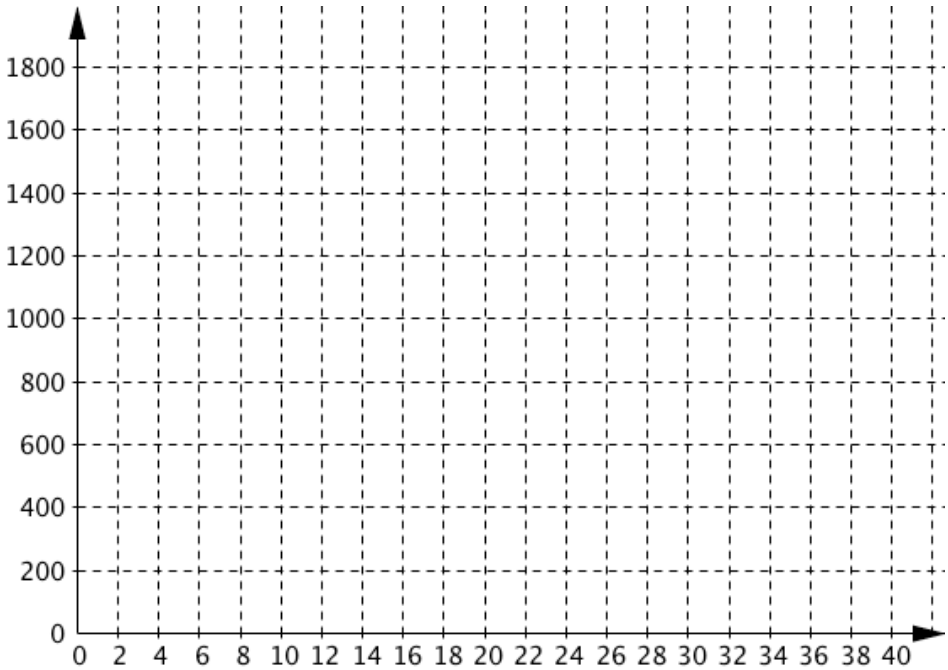


ABCD est un carré de coté 40 m et CDE un triangle rectangle en D tel que DE = 50 m .
Initialement, Frédéric possédait la parcelle carrée tandis que Gilles était le propriétaire de la triangulaire mais Gilles désire acheter à Frédéric un morceau de terrain CDM où M est un point du segment [DA].
On pose : x = DM. On a : $x \in [0 ; 40]$.

1) a) Exprimer l'aire du triangle CDM en fonction de x.
   b) En déduire l'aire $\mathscr{F}$ du quadrilatère ABCM en fonction de x.
   c) Déterminer l'aire $\mathscr{G}$ du triangle CME en fonction de x.
   d) Calculer la valeur de x pour laquelle les aires $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont égales.

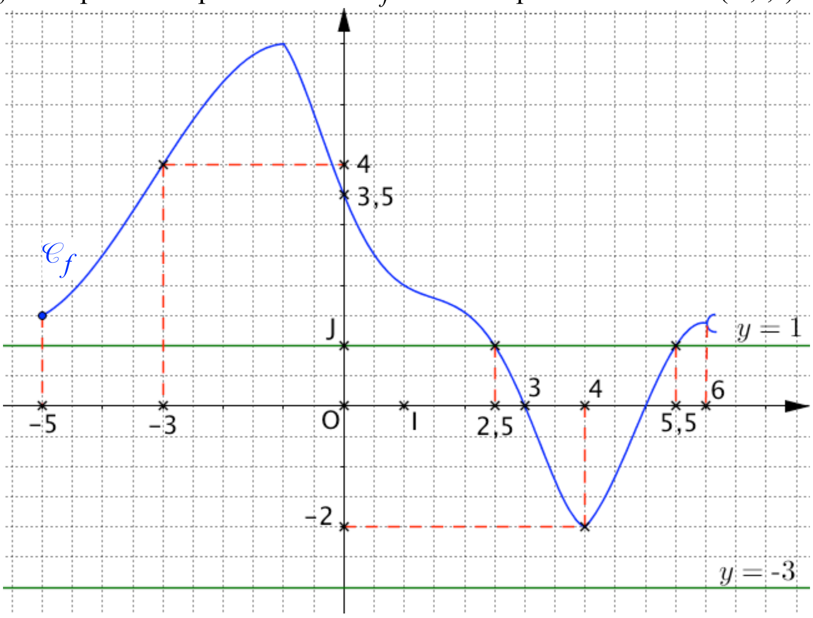
2) On considère les fonctions f et g définies sur [0 ; 40] par : $f(x) = -20x + 1600$ et $g(x) = 20x + 1000$.
   Représenter graphiquement, dans le repère orthogonal donné ci-contre, les deux fonctions f et g.

3) Répondre aux questions suivantes en justifiant soigneusement <u>par un calcul</u> :
   a) Quelle est la valeur de x lorsque l'aire $\mathscr{F}$ du terrain de Frédéric est 1500 ?
   b) Pour quelles valeurs de x le terrain de Gilles sera plus grand que celui de Frédéric ?


1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40

Correction du devoir commun n°1

Exercice 1 : Une fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère orthonormé (O,I,J).



1) f est définie sur [-5 ; 6[.
2) L'image de 3 par la fonction f est 0.
f (-3) = 4.
3) a) 1 a deux antécédents par la fonction f : 2,5 et 5,5.

   b) -3 n'a pas d'antécédent par la fonction f (car la droite d'équation y = -3 ne coupe pas $\mathscr{C}_f$).
4) Etablir le tableau des variations de la fonction f.

x	-5		-1		4		6
f	1,5	↗	6	↘	-2	↗	‖

5) a) Le maximum de la fonction f sur [0 ; 6] est 3,5. Il est atteint en x = 0.
   b) Le minimum de la fonction f sur son ensemble de définition est -2. Il est atteint en x = 4.
6) On donne le tableau des variations d'une fonction g définie sur [-10 ; 10].

x	-10		-7		-1		0		4		5		10
g	0,1	↗	2	↘	0	↘	-5	↗	0	↗	3	↘	1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si le tableau ne permet pas de le savoir. Justifier chaque réponse.

a) g (1) > g (3)

[1 ; 3] ⊂ [0 ; 4]
g est croissante sur [0 ; 4] donc g l'est aussi sur [1 ; 3].
Donc : 1 < 3 ⇒ g (1) < g (3)
L'affirmation était fausse.

b) g (-9) < g (-6)

g n'est pas monotone sur [-9 ; -6].
Le tableau ne permet pas de savoir si l'affirmation est vraie ou fausse.

c) g (-6) < 2

-6 ∈ [-7 ; -1] et le maximum de g sur [-7 ; -1] est 2.
Donc : g (-6) < 2
L'affirmation était vraie.

d) g (2) > g (-8)

2 ∈ [0 ; 4] et g est négative sur [0 ; 4].
Donc g (2) < 0.
-8 ∈ [-10 ; -7] et g est positive sur [-10 ; -7].
Donc g (-8) > 0.
Ainsi : g (2) < 0 < g (-8)
L'affirmation était fausse.

Exercice 2 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

1) a) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 9 - 4 = x^2 + 6x + 5 = f(x)$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+3)^2 - 4$

$f(x) = (x+3)^2 - 2^2$

$f(x) = (x+3+2)(x+3-2)$

$f(x) = (x+5)(x+1)$

2) a) $f(-3) = (-3+3)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$

$f(-5) = (-5+5)(-5+1) = 0 \times (-4) = 0$

b) $f(x) = 5$

$x^2 + 6x + 5 = 5$

$x^2 + 6x = 0$

$x(x+6) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Donc : $x = 0$ ou : $x + 6 = 0$.

$x = 0$ ou : $x = -6$

Donc 5 a deux antécédents : 0 et -6.

c) $f(x) = 0$.

$(x+5)(x+1) = 0$

On en déduit : $x + 5 = 0$ ou : $x + 1 = 0$.

$x = -5$ ou : $x = -1$

3) $f(x) \geq f(-3)$

$(x+3)^2 - 4 \geq -4$

$(x+3)^2 \geq 0$

$x \in \mathbb{R}$ car un carré est toujours positif ou nul donc cette inégalité est toujours vérifiée.

Donc, pour tout réel x, $f(x) \geq -4$. Ainsi, -4 est un minimum de f.

4) $f(x) > g(x)$

$x^2 + 6x + 5 > x^2 + 8x + 13$

$6x + 5 > 8x + 13$

$6x - 8x > 13 - 5$

$-2x > 8$

$x < -\frac{8}{2}$ (Attention! L'inégalité change de sens car on divise chaque membre par -2 qui est négatif)

$x < -4$

5)

Variables : x et y sont deux réels

Début

Lire x

y prend la valeur $x^2 + 8x + 13$

Afficher y

Fin

ou bien :

Variables : x et y sont deux réels

Entrée : Saisir x

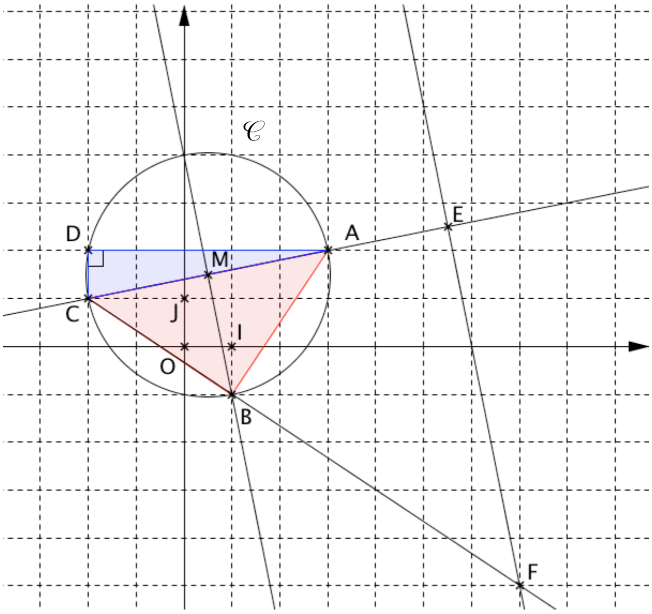
Traitement : y prend la valeur $x^2 + 8x + 13$

Sortie : Afficher y

Remarque : On peut aussi écrire un algorithme avec la seule variable x.

Exercice 3 : Le plan est rapporté au repère orthonormé (O , I , J).

1)



2) a) On calcule AC^2, AD^2 et CD^2.

$AC^2=(x_c-x_A)^2+(y_C-y_A)^2=(-2-3)^2+(1-2)^2=(-5)^2+(-1)^2=25+1=26$

$AD^2=(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2=(-2-3)^2+(2-2)^2=(-5)^2+0^2=25$

$CD^2=(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2=(-2+2)^2+(2-1)^2=0^2+1^2=0+1=1$

On a : 26 = 25 + 1

Donc : $AC^2 = AD^2 + CD^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACD est rectangle en D.

b) Puisque ACD est rectangle en D, le centre M de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$ est le milieu de l'hypoténuse [AC].

Donc : $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ et : $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

3) a) M est le milieu de [AC] donc CM = MA.

E est le symétrique de M par rapport à A donc MA = AE.

Puisque les points C, M, A et E sont alignés dans cet ordre et que CM = MA = AE alors CM = $\frac{1}{3}$CE.

b) Dans le triangle CEF on a :

- M ∈ (CE)
- B ∈ (CF)
- (BM) // (EF)

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{CM}{CE}=\frac{CB}{CF}=\frac{BM}{EF}$

Or : CM = $\frac{1}{3}$CE Donc : $\frac{CM}{CE}=\frac{1}{3}$ On en déduit : $\frac{BM}{EF}=\frac{1}{3}$

En utilisant le produit en croix on obtient : EF = 3 BM.

On admet que $\mathscr{C}$ a pour rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$. Donc : BM = $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Ainsi : EF = $\frac{3\sqrt{26}}{2}$

4) a) La droite (AC) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc il existe deux réels *a* et *b* tels que (AC) a une équation de la forme $y = ax + b$.

$a=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{2-1}{3+2}=\frac{1}{5}$

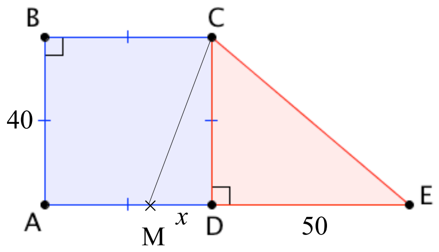
A (3 ; 2) ∈ (AC) donc : $2=\frac{1}{5}\times 3+b$ On en déduit : $b=2-\frac{3}{5}=\frac{10}{5}-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$

Finalement, (AC) a pour équation : $y=\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$

b) La droite (AD) a pour équation $y = 2$ car elle est parallèle à l'axe des abscisses et passe par A (3 ; 2).

La droite (CD) a pour équation $x = -2$ car elle est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par C (-2 ; 1).

Exercice 4 :



1) a) $\mathcal{A}_{CDM} = \dfrac{CD \times DM}{2} = \dfrac{40 \times x}{2} = 20x$

b) $\mathcal{F} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ACM} = 40^2 - 20x = 1600 - 20x$

c) $\mathcal{G} = \mathcal{A}_{CDE} + \mathcal{A}_{CDM} = \dfrac{40 \times 50}{2} + 20x = 1000 + 20x$

d) On résout $\mathcal{F} = \mathcal{G}$

$1\,600 - 20x = 1\,000 + 20x$

$-20x - 20x = 1\,000 - 1\,600$

$-40x = -600$

$x = \dfrac{-600}{-40}$

$x = 15$

Les aires des terrains de Frédéric et de Gilles sont égales pour $x = 15$ m.

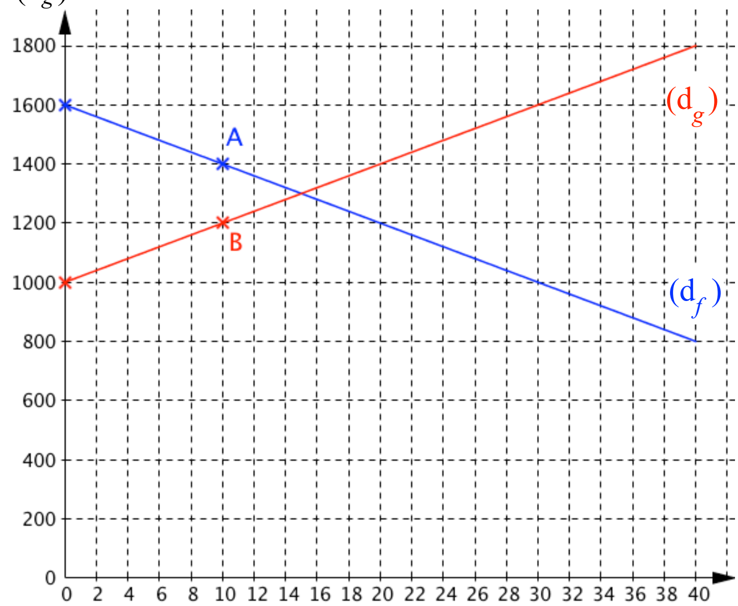
2) f et g sont des fonctions affines donc leurs représentations graphiques sont des droites : (d_f) et (d_g).
On les construit à partir de leurs ordonnées à l'origine et d'un point.

$f(10) = -20 \times 10 + 1600 = -200 + 1600 = 1400$

Donc $A(10 ; 1400) \in (d_f)$.

$g(10) = 20 \times 10 + 1000 = 200 + 1000 = 1200$

Donc $B(10 ; 1200) \in (d_g)$.



3)

a) $f(x) = 1500$

$1600 - 20x = 1500$

$1600 - 1500 = 20x$

$100 = 20x$

$x = \dfrac{100}{20} = 5$

Ainsi, lorsque $x = 5$ m, Frédéric aura un terrain d'une superficie de 1500 m².

b) $g(x) > f(x)$

$20x + 1000 > 1600 - 20x$

$20x + 20x > 1600 - 1000$

$40x > 600$

$x > \dfrac{600}{40}$

$x > 15$

Si x est supérieur à 15m alors le terrain de Gilles sera plus grand que celui de Frédéric.