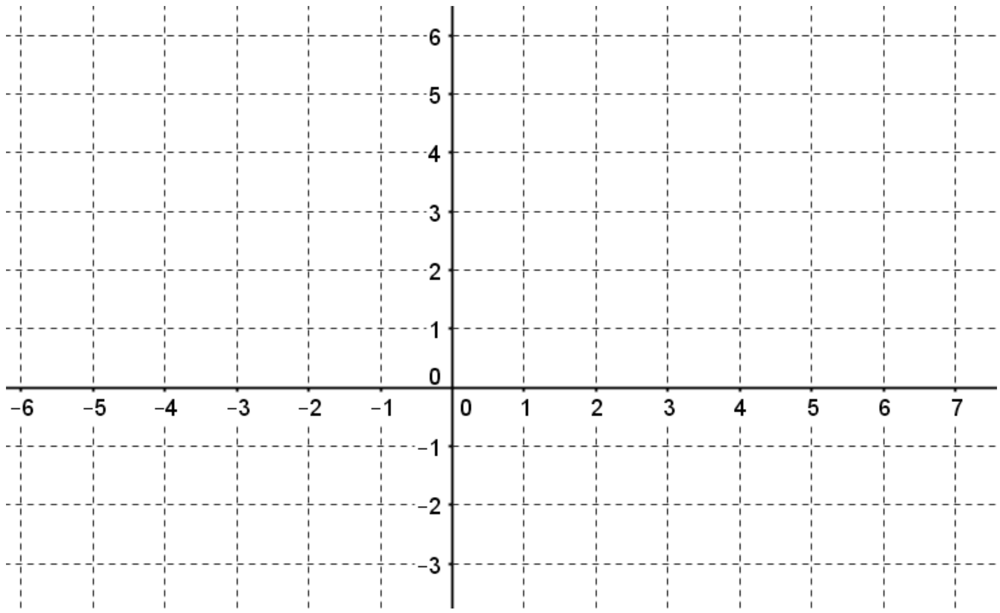
Nom : *Classe* : 2nde	**Devoir commun n°2** le 04/05/2016	*Note* : … / 30

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le sujet devra être rendu avec la copie.
Le barème inclus 2,5 points de bonus. La note sur 32,5 sera enregistrée sur 30.

Exercice 1 : **… / 11**

Soient trois points : A (1 ; -1), B (-2 ; 0) et C (-3 ; 3).



La figure sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2.
   a) Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{BA} + \vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.
   Faire apparaître les étapes de construction .
   b) Calculer les coordonnées du point D.
3. Soit E (-4 ; 6).
   a) Déterminer l'équation de la droite (BE).
   b) Le point C appartient-il à la droite (BE) ? Justifier.
4. On admet que le point D a pour coordonnées : D (4 ; -2)
   a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.
   b) Que peut-on en déduire ?
5. Soit K le milieu du segment [ED].
   a) Calculer les coordonnées de K.
   b) Montrer que ACEK est un parallélogramme.

Exercice 2 : … / 5,5

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x^2 - 4x + 7$.

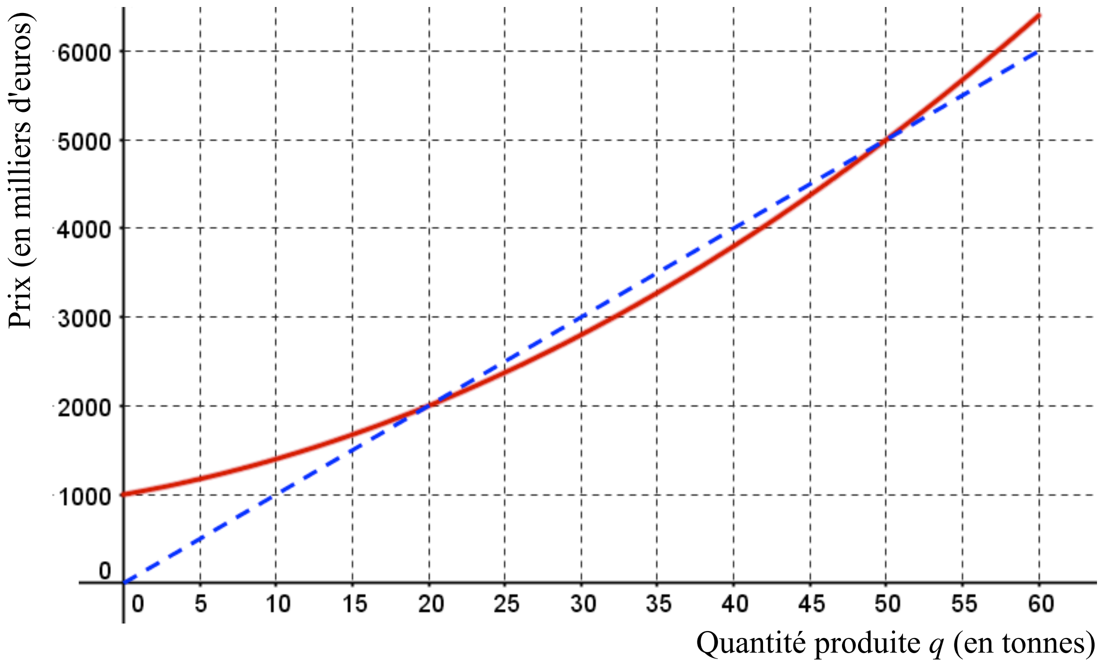
1. Montrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) - g(x) = 2(x-1)(x+2)$
2. Résoudre $f(x) \leq g(x)$
3. Résoudre $f(x) = -2x$
4. Résoudre $f(x) + g(x) > -6x + 14$

Exercice 3 : On termine (toujours) par du sucré ! … / 6,5

Charlie vient d'être nommé responsable de la chocolaterie du village. Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et Charlie doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.

On note q la quantité de chocolat produite (en tonnes) avec : $0 < q < 60$.

Le graphique ci-dessous donne le coût de production ainsi que la recette (en milliers d'euros) en fonction de la quantité produite (en tonnes). La courbe rouge est associée au coût et la droite en pointillé à la recette.



1. Avec la précision permise par ce graphique, conjecturer les quantités de chocolat que doit produire la chocolaterie de Charlie pour être rentable.
2. Les formules donnant le coût de production $C(q)$ et la recette de la chocolaterie $R(q)$ ont été calculées :
   - $C(q) = q^2 + 30q + 1000$
   - $R(q) = 100q$

   Le bénéfice d'une entreprise est la différence entre ses recettes et ses coûts de production.

   a) Montrer que le bénéfice $B(q)$ est donné par : $B(q) = -q^2 + 70q - 1000$

   b) Montrer que : $B(q) \geq 0 \Leftrightarrow -(q-20)(q-50) \geq 0$

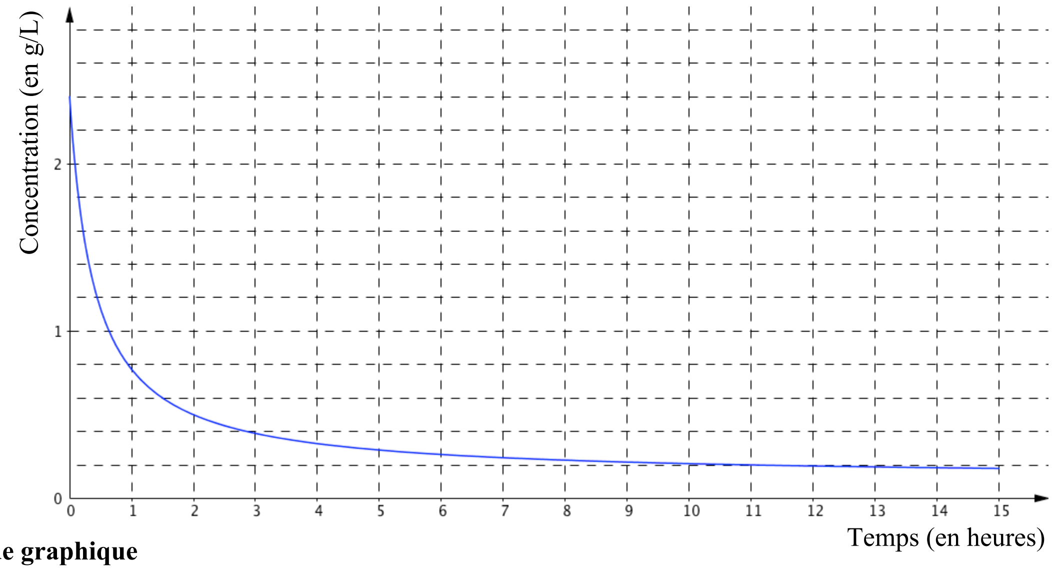
   c) En déduire les quantités à produire pour que la chocolaterie de Charlie réalise un bénéfice.
3.

   a) Etudier les variations de la fonction B.

   b) En déduire le bénéfice maximal que peut réaliser la chocolaterie et la quantité correspondante.

Exercice 4 : Concentration d'un médicament dans le sang. … / 9,5

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang. On obtient la courbe ci-dessous :



Partie A : Etude graphique

Avec la précision permise par le graphique, conjecturer :

1. La concentration à l'instant initial.
2. L'intervalle de temps pendant lequel la concentration est inférieure ou égale à 0,2 gramme par litre.
   Faire apparaitre sur le graphique les traits de construction.

Partie B : Etude théorique

On admet que la concentration du médicament dans le sang, en grammes par litre, peut être modélisée par la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 15] par :

$$f(x) = \frac{0{,}6x+4{,}8}{5x+2}$$

où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial.

1. Justifier que f est définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 15].
2. Calculer :
   a) La concentration initiale du médicament dans le sang.
   b) La concentration du médicament au bout de 8 h, sous forme d'une fraction irréductible puis arrondis à 10^{-3} près.
   c) Le temps nécessaire pour que la concentration du médicament dans le sang atteigne 0,5 g/L.
3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir le résultat suivant.

   Calcul formel
   1 f(x)−0.2
   $\rightarrow \dfrac{-2\,x+22}{25\,x+10}$

   a) Démontrer ce résultat.
   b) Dresser le tableau de signe de $\frac{-2x+22}{25x+10}$ sur l'intervalle [0 ; 15].
   c) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,2 gramme par litre. Utiliser les résultats précédents pour déterminer pendant combien de temps le médicament est actif.
4. Observer l'algorithme suivant.

Variables :	x, y, a, b et p des nombres réels.
Entrées :	Saisir a, b et p
Initialisation :	x prend la valeur a
Traitement : Sorties :	Tant que $x \leq b$ faire : y prend la valeur $(0,6x+4,8) \div (5x+2)$ Afficher y x prend la valeur $x+p$ Fin Tant que

   a) Que permet de faire cet algorithme lorsqu'on saisit en entrée $a = 8$, $b = 11$ et $p = 0{,}25$?

   b) Compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats au millième près.

x	8	8.25	8.5	8.75	9	9.25	9.5	9.75	10	10.25	10.5	10.75	11
$f(x)$													

   c) Interpréter le résultat obtenu dans la colonne grisée.

Correction du Devoir Commun n°2

Exercice 1 : Soient trois points : A (1 ; -1), B (-2 ; 0) et C (-3 ; 3).

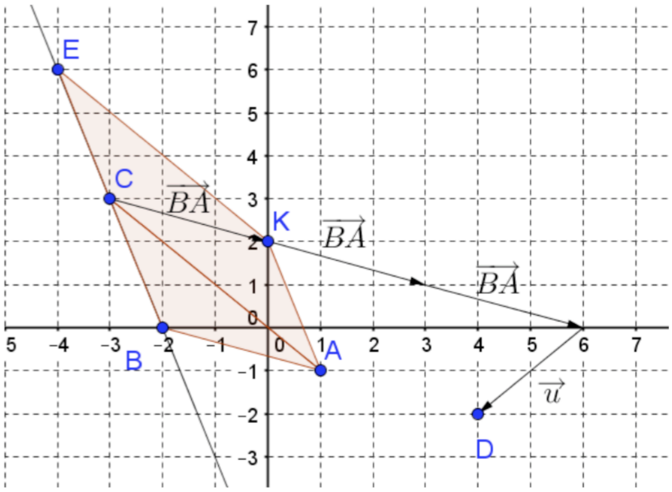
1. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-2-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{10}$

   $AC=\sqrt{(-3-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{32}$

   $BC=\sqrt{(-3+2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

   On remarque que AB = BC

   Conclusion : le triangle ABC est isocèle en B.



2.
   a) Voir la figure ci-contre.

   b) On sait que $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{BA} + \vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

   Or $\overrightarrow{CD}:\begin{pmatrix}x_D+3\\y_D-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}:\begin{pmatrix}1+2\\-1-0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

   Donc $\begin{cases}x_D+3=3\times3-2\\y_D-3=3\times(-1)-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=4\\y_D=-2\end{cases}$

   Conclusion : D (4 ; -2).

3. Soit E (-4 ; 6).

   a) $a=\dfrac{y_E-y_B}{x_E-x_B}=\dfrac{6-0}{-4+2}=\dfrac{6}{-2}=-3$

   Donc (BE) a une équation de la forme $y = -3x + b$

   Or B ∈ (BE) donc $y_B = -3x_B + b$

   C'est-à-dire : $0 = -3 \times (-2) + b$

   Donc $b = -6$

   Conclusion : la droite (BE) a pour équation : $y = -3x - 6$

   b) C : (-3 ; 3) appartient à la droite (BE) si et seulement si $-3x_C - 6 = y_C$

   Or : $-3 \times (-3) - 6 = 9 - 6 = 3$

   Conclusion : le point C appartient à la droite (BE).

4.
   a) $\overrightarrow{AC}:\begin{pmatrix}-3-1\\3+1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}:\begin{pmatrix}4+4\\-2-6\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$

   $xy'-x'y=-4\times(-8)-4\times8=32-32=0$

   Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.

   Autre méthode : on remarque que $\overrightarrow{ED} = -2\overrightarrow{AC}$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.

   b) Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires, ils ont la même direction.

   Conclusion : On en déduit que les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

5.
   a) K est le milieu de [ED].

   $x_K=\dfrac{x_E+x_D}{2}=\dfrac{-4+4}{2}=0$ et $y_E=\dfrac{y_E+y_D}{2}=\dfrac{6-2}{2}=2$

   Conclusion : K (0 ; 2).

   b) ACEK est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{KE}$.

   $\overrightarrow{AC}:\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE}:\begin{pmatrix}-4-0\\6-2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{KE}$ ont les mêmes coordonnées donc ils sont égaux.

   Conclusion : ACEK est un parallélogramme.

Exercice 2 :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x^2 - 4x + 7$.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) - g(x) = 2(x-1)(x+2)$
   Pour tout réel x on a :
   D'une part : $f(x) - g(x) = 3x^2 - 2x + 3 - (x^2 - 4x + 7) = 3x^2 - 2x + 3 - x^2 + 4x - 7 = 2x^2 + 2x - 4$
   D'autre part : $2(x-1)(x+2) = 2(x^2 + 2x - x - 2) = 2(x^2 + x - 2) = 2x^2 + 2x - 4$
   Donc : $f(x) - g(x) = 2(x-1)(x+2)$

2. Résoudre $f(x) \leq g(x)$
   $f(x) \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1)(x+2) \leq 0$
   On dresse le tableau des signes de $2(x-1)(x+2)$:

   $x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$
   $x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -2$

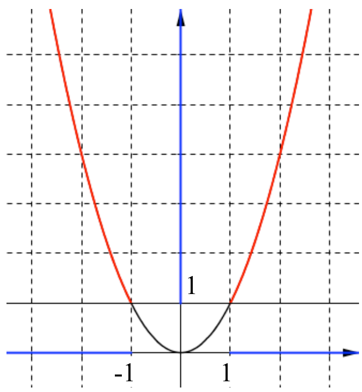
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2(x-1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   D'après le tableau de signes :
   $2(x-1)(x+2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2\ ;\ 1]$
   Donc : $f(x) \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2\ ;\ 1]$

3. Résoudre $f(x) = -2x$
   $f(x) = -2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2x + 3 = -2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1$
   Or, un carré est toujours positif ou nul.
   Donc, l'équation $f(x) = -2x$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre $f(x) + g(x) > -6x + 14$
   $f(x) + g(x) > -6x + 14 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2x + 3 + x^2 - 4x + 7 > -6x + 14 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 1$

   Méthode 1 :
   On résout graphiquement l'inéquation $x^2 > 1$



   Méthode 2 :
   On résout l'inéquation à l'aide d'un tableau des signes :
   $x^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2(x-1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Conclusion : $x \in [-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 **: On termine (toujours) par du sucré !**

1. Pour qu'elle soit rentable, la chocolaterie semble devoir produire entre 20 et 50 tonnes (droite bleue au dessus de la courbe rouge).

2. a) $\forall\ q \in [0\ ;\ 60]$, $B(q) = R(q) - C(q)$
   $B(q) = 100q - (q^2 + 30q + 1000)$
   $B(q) = 100q - q^2 - 30q - 1000$
   $B(q) = -\ q^2 + 70q - 1000$

   b) Il faut et il suffit de montrer que : $B(q) = -\ (q-20)(q-50)$.
   En effet :
   $-\ (q-20)(q-50) = -\ (q^2 - 50q - 20q + 1000) = -\ (q^2 - 70q + 1000) = -\ q^2 + 70q - 1000 = B(q)$
   Ainsi : $B(q) \geq 0 \Leftrightarrow -(q-20)(q-50) \geq 0$

   c) La chocolaterie réalise un bénéfice si et seulement si : $B(q) > 0$
   Pour résoudre cette inéquation, on utilise un tableau de signe de $-\ (q-20)(q-50) = B(q)$

   $q - 20 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q > 20$
   $q - 50 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q > 50$

   D'après le tableau de signes :
   $-\ (q-20)(q-50) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q \in \,]20\ ;\ 50[$

q	$-\infty$	20		50	$+\infty$
$-\ 1$	$-$		$-$		$-$
$q-20$	$-$	0	$+$		$+$
$q-50$	$-$		$-$	0	$+$
$-\ (q-20)(q-50)$	$-$	0	$+$	0	$-$

   Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, la quantité à produire doit être comprise entre 20 et 50 tonnes.

3. a) Variations de la fonction B.
   $B(q) = -\ q^2 + 70q - 1000$ s'écrit sous la forme $aq^2 + bq + c$ avec : $a = -1$; $b = 70$ et $c = -\ 1000$.
   Le coefficient du terme de plus haut degré est négatif ($a = -1$) donc la parabole est ouverte vers le bas.

   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{70}{2} = 35$
   $\beta = B(\alpha) = -(35-20)(35-50) = -15 \times (-15) = 225$
   B est croissante sur [0 ; 35] puis décroissante sur [36 ; 60].

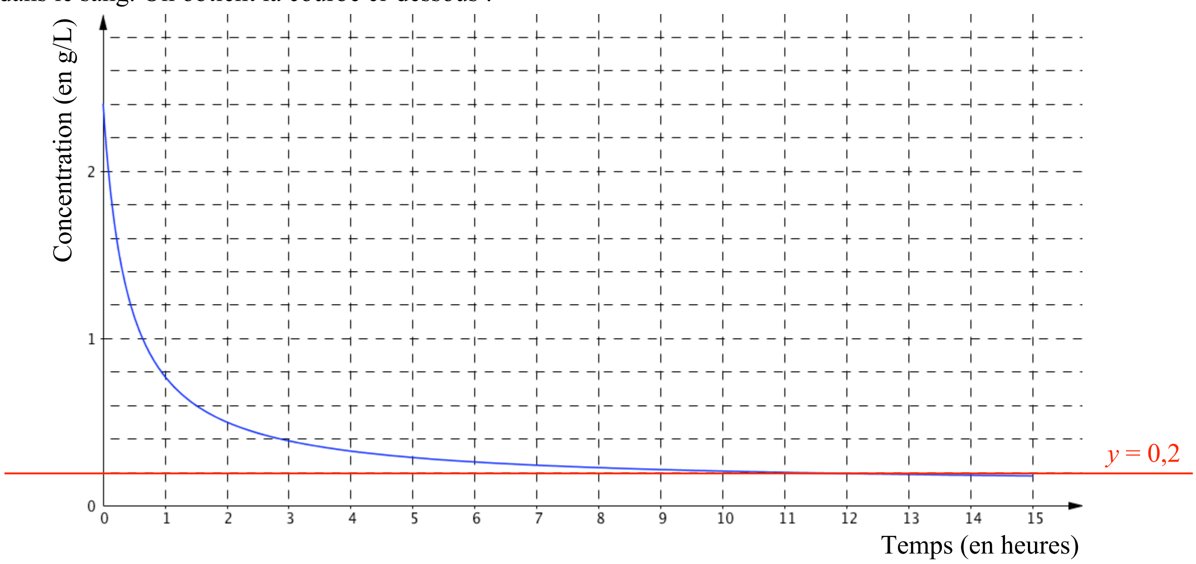
   Tableau de variation de B :

q	0	35	60
B	↗	225	↘

   b) Les quantités produites sont données en tonnes et les montants sont exprimés en milliers d'euros.
   On en déduit, d'après le tableau des variations précédent, que le bénéfice maximal est de 225 000 €
   pour une production de 35 tonnes de chocolat.

Exercice 4 **: Concentration d'un médicament dans le sang.**

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang. On obtient la courbe ci-dessous :



Partie A : Etude graphique

1. La concentration à l'instant initial semble être 2,4 g/L.
2. La concentration semble inférieure ou égale à 0,2 gramme par litre sur l'intervalle de temps [11 ; 15].

Partie B : Etude théorique

On admet que la concentration du médicament dans le sang, en grammes par litre, peut être modélisée par la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 15] par :

$$f(x) = \frac{0{,}6x+4{,}8}{5x+2}$$

où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial.

1. $f(x)$ est définie si et seulement si : $5x + 2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 5x \neq -2 \;\Leftrightarrow\; x \neq -\frac{2}{5}$
   Or : $-\frac{2}{5} \notin [0\,;\,15]$. Donc f est définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 15].

2. a) $f(0) = \frac{0{,}6\times 0+4{,}8}{5\times 0+2} = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4$.
   La concentration initiale du médicament dans le sang est 2,4 g/L.
   b) $f(8) = \frac{0{,}6\times 8+4{,}8}{5\times 8+2} = \frac{9{,}6}{42} = \frac{96}{420} = \frac{48}{210} = \frac{24}{105} = \frac{8}{35} \approx 0{,}229$.
   La concentration du médicament au bout de 8 h est $\frac{8}{35}$ g/L, soit environ 0,229 g/L.
   c) $f(x) = 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; \frac{0{,}6x+4{,}8}{5x+2} = 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; 0{,}6x + 4{,}8 = 0{,}5(5x+2) \;\Leftrightarrow\; 0{,}6x + 4{,}8 = 2{,}5x + 1$
   $f(x) = 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; 0{,}6x - 2{,}5x = 1 - 4{,}8 \;\Leftrightarrow\; -1{,}9x = -3{,}8 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3{,}8}{1{,}9} \;\Leftrightarrow\; x = 2$
   Il faut 2 h pour que la concentration du médicament dans le sang atteigne 0,5 g/L.

3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir le résultat suivant.

▸ Calcul formel	
1	f(x)-0.2
	$\rightarrow \frac{-2x+22}{25x+10}$

   a) Démontrer ce résultat.
   $f(x) - 0{,}2 = \frac{0{,}6x+4{,}8}{5x+2} - 0{,}2 = \frac{0{,}6x+4{,}8-0{,}2(5x+2)}{5x+2} = \frac{0{,}6x+4{,}8-x-0{,}4}{5x+2} = \frac{-0{,}4x+4{,}4}{5x+2} = \frac{5(-0{,}4x+4{,}4)}{5(5x+2)} = \frac{-2x+22}{25x+10}$
   b) Tableau de signe de $\frac{-2x+22}{25x+10}$ sur l'intervalle [0 ; 15] :
   $-2x + 22 > 0 \;\Leftrightarrow\; -2x > -22 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{-22}{-2} \;\Leftrightarrow\; x < 11$
   $25x + 10 > 0 \;\Leftrightarrow\; 25x > -10 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{-10}{25} \;\Leftrightarrow\; x > \frac{-2}{5}$
   Donc $25x + 10$ est positif pour tout réel x de [0 ; 15].

x	0		11		15
$-2x + 22$		+	0	−	
$25x + 10$		+		+	
$\frac{-2x+22}{25x+10}$		+	0	−	

   c) Le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,2 gramme par litre.
   $f(x) < 0{,}2 \;\Leftrightarrow\; f(x) - 0{,}2 < 0$
   D'après le tableau de signes obtenus précédemment : $f(x) - 0{,}2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in\,]11\,;\,15]$.
   Ainsi, le médicament est actif pendant 11 h.

4. Observer l'algorithme suivant.

Variables :	x, y, a, b et p des nombres réels.
Entrées :	Saisir a, b et p
Initialisation :	x prend la valeur a
Traitement : Sorties :	Tant que $x \leq b$ faire : y prend la valeur $(0{,}6x + 4{,}8) \div (5x + 2)$ Afficher y x prend la valeur $x + p$ Fin Tant que

   a) Que permet de faire cet algorithme lorsqu'on saisit en entrée $a = 8$, $b = 11$ et $p = 0{,}25$?
   L'algorithme permet d'afficher la table des valeurs de $f(x)$ sur l'intervalle [8 ; 11] avec un pas de 0,25.

   b) Compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats au millième près.

x	8	8.25	8.5	8.75	9	9.25	9.5	9.75	10	10.25	10.5	10.75	11
$f(x)$	0,229	0,225	0,222	0,220	0,217	0,215	0,212	0,210	0,208	0,206	0,204	0,202	0,2

   c) Interpréter le résultat obtenu dans la colonne grisée.
   Au bout de 9 h 15 min la concentration du médicament dans le sang était 0,215 g/L.