Nom :
Classe : Tle ES – Spé Maths

Devoir Maison : les matrices

Exercices de préparation au DS

Compétences évaluées	*Avis de l'élève* ***Oui***	*Avis de l'élève* ***Non***	*Avis du professeur* ***Oui***	*Avis du professeur* ***Non***
Calcul matriciel (somme / produit de deux matrices / multiplication d'une matrice par un réel).				
Justifier qu'une matrice carrée d'ordre 2 est inversible.				
Déterminer l'inverse d'une matrice.				
Résolution de systèmes.				
Utilisation du calcul matriciel pour résoudre un problème et déterminer une fonction.				
Utilisation de la calculatrice.				

Exercice 1 :

1) Pour la réalisation de ses chantiers, une entreprise de gros-oeuvre du bâtiment achète, auprès de deux fournisseurs A et B, le béton (en m^3), les briques (en nombres de palettes) et les charpentes (en m^3).
La feuille de calcul ci-dessous récapitule les commandes passées le 1er et le 2ème semestre 2015.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1er semestre	Fournisseur A	Fournisseur B		2ème semestre	Fournisseur A	Fournisseur B
2	Béton	125	102		Béton	157	75
3	Briques	79	95		Briques	95	101
4	Charpentes	24	20		Charpentes	14	31

Détermine la matrice A qui résume la commande annuelle des matériaux.

2) Les prix unitaires de chaque matériaux au 1er semestre sont donnés ci-dessous :

	A	B	C	D
1	1er semestre	Béton	Briques	Charpentes
2	Fournisseur A	275	515	2518
3	Fournisseur B	297	495	2425

Au 2nd semestre, ces prix ont globalement augmentés de 2,25 % chez les deux fournisseurs.
Détermine la matrice P des prix unitaires (arrondis à l'euro près) chez chaque fournisseur au 2nd semestre.

Exercice 2 :

1) Sabrina a écrit le résultat suivant sur sa copie.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -16 & 25 \end{pmatrix}$$

A-t-elle indiqué le bon résultat ? Justifie.

2) On donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Pourquoi ne peut-on pas calculer $A \times B$?
b) Calcule $B \times A$.

Exercice 3 :

La feuille de calcul ci-dessous indique le nombre de licenciés d'un club de tennis ainsi que le montant en euros des cotisations suivant la catégorie.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Niveau	Jeune < 16 ans	Adulte masculin	Adulte féminin		Montant des cotisations	
2	Débutant	25	5	3		Jeune < 16 ans	55
3	Confirmé	31	32	19		Adulte masculin	70
4	Compétition	14	14	11		Adulte féminin	65

Utilise le calcul matriciel pour déterminer le total des cotisations perçues par le club de tennis, pour chaque niveau.

Exercice 4 :

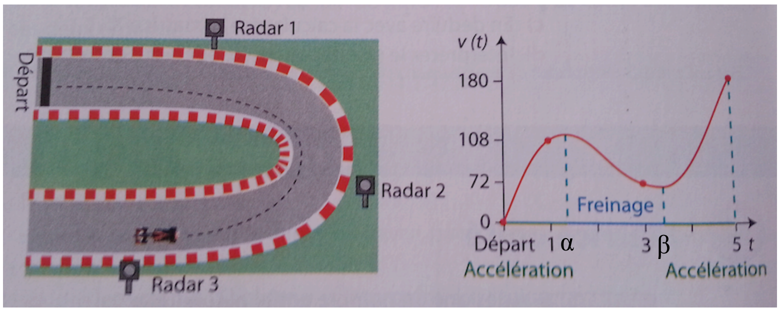
On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Justifie que A est inversible.

2) On considère les matrices suivante : $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

a) Traduis l'équation AX = B par un système puis exprime x et y en fonction de a et b.
b) Déduis-en la matrice inverse de A.

Exercice 5 : Grand prix de formule 1.
Lors d'un grand prix de formule 1, un pilote sort du premier virage et ré-accélère comme indiqué ci-dessous. On admet que la vitesse (en km/h) de la formule 1 est modélisée, en fonction du temps t en secondes, par une fonction v définie sur l'intervalle [0 ; 5] par : $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ où a, b, c et d désignent quatre réels.



Le but de l'exercice est de déterminer la fonction vitesse et le temps de freinage de la F1.

1) Mise en équations.

a) Explique pourquoi $d = 0$.

b) Le long de ce parcours, trois radars de vitesse sont déclenchés :

- Le premier, au bout de 1 s, a mesuré une vitesse de 108 km/h.
- Le deuxième, au bout de 3 s, a mesuré une vitesse de 72 km/h.
- Le troisième, au bout de 5 s, a mesuré une vitesse de 180 km/h.

Explique pourquoi les réels a, b et c sont solutions du système (S) : $\begin{cases} a+b+c=108 \\ 27a+9b+3c=72 \\ 125a+25b+5c=180 \end{cases}$

2) Résolution du système.

a) Ecris le système (S) sous la forme matricielle AX = B.

b) Utilise la calculatrice pour déterminer A^{-1} puis résous l'équation AX = B.

c) Déduis-en l'expression de v en fonction de t.

Correction des exercices de préparation au DS sur les matrices

Exercice 1 :

1)

$$A=\begin{pmatrix}125 & 102\\ 79 & 95\\ 24 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}157 & 75\\ 95 & 101\\ 14 & 31\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}282 & 177\\ 174 & 196\\ 38 & 51\end{pmatrix}$$

2)On augmente un prix de 2,25% en le multipliant par 1,0225.

Donc, la matrice des prix unitaires (arrondis à l'euro près) chez chaque fournisseur au 2nd semestre est :

$$P=1{,}0225\times\begin{pmatrix}275 & 515 & 2518\\ 297 & 495 & 2425\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}281 & 527 & 2575\\ 304 & 506 & 2480\end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1)

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 5\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times2+3\times4 & -2\times3-3\times5\\ -4\times2-5\times4 & 4\times3+5\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+12 & -6-15\\ -8-20 & 12+25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16 & -21\\ -28 & 37\end{pmatrix}$$

Donc Sabrina n'avait pas trouvé le bon résultat.

2) On donne : $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\end{pmatrix}$.

a) On ne peut pas calculer $A\times B$ car il y a plus de coefficients sur les lignes de A que sur les colonnes de B.

b) Calcule $B\times A$.

$$B\times A=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\times1+8\times4 & 7\times2+8\times5 & 7\times3+8\times6\\ 9\times1+10\times4 & 9\times2+10\times5 & 9\times3+10\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7+32 & 14+40 & 21+48\\ 9+40 & 18+50 & 27+60\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}39 & 54 & 69\\ 49 & 68 & 87\end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

La feuille de calcul ci-dessous indique le nombre de licenciés d'un club de tennis ainsi que le montant en euros des cotisations suivant la catégorie.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Niveau	Jeune < 16 ans	Adulte masculin	Adulte féminin		Montant des cotisations	
2	Débutant	25	5	3		Jeune < 16 ans	55
3	Confirmé	31	32	19		Adulte masculin	70
4	Compétition	14	14	11		Adulte féminin	65

Utilise le calcul matriciel pour déterminer le total des cotisations perçues par le club de tennis, pour chaque niveau.

$$\begin{pmatrix}25 & 5 & 3\\ 31 & 32 & 19\\ 14 & 14 & 11\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}55\\ 70\\ 65\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\times55+5\times70+3\times65\\ 31\times55+32\times70+19\times65\\ 14\times55+14\times70+11\times65\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,920\\ 5\,180\\ 2\,465\end{pmatrix}$$

Donc le club a perçu 1 920 € de cotisations des débutants, 5 180 € des confirmés et 2 465 € des compétiteurs.

Exercice 4 :

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

1) Justifie que A est inversible.

$8\times1-2\times3=8-6=2\neq0$

Donc A est inversible.

2) On considère les matrices suivante : $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$.

a) Traduis l'équation AX = B par un système puis exprime x et y en fonction de a et b.

$$AX=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}8x+3y=a\\ 2x+y=b\end{cases}$$

$\begin{cases} 8x+3y=a \\ 2x+y=b \end{cases}$ $\begin{cases} 8x+3y=a \\ y=b-2x \end{cases}$ $\begin{cases} 8x+3(b-2x)=a \\ y=b-2x \end{cases}$ $\begin{cases} 8x+3b-6x=a \\ y=b-2x \end{cases}$

$\begin{cases} 2x=a-3b \\ y=b-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b \\ y=b-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b \\ y=b-2(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b) \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b \\ y=b-a+3b \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b \\ y=-1a+4b \end{cases}$

b) Déduis-en la matrice inverse de A.

$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

Or : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b \\ y=-1a+4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Donc : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

1) Mise en équations.

a) $\forall$ t $\in$ [0 ; 5], $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ où a, b, c et d désignent quatre réels.
$v(0) = 0$ donc $d = 0$

b) $v(1) = 108$ donc : $1^3a + 1^2b + 1c + 0 = 108$ donc : $a + b + c = 108$
$v(3) = 72$ donc : $3^3a + 3^2b + 3c + 0 = 72$ donc : $27a + 9b + 3c = 72$
$v(5) = 180$ donc : $5^3a + 5^2b + 5c + 0 = 180$ donc : $125a + 25b + 5c = 180$

Finalement a, b et c sont solutions du système (S) : $\begin{cases} a+b+c=108 \\ 27a+9b+3c=72 \\ 125a+25b+5c=180 \end{cases}$

2) Résolution du système.

a) (S) : $\begin{cases} a+b+c=108 \\ 27a+9b+3c=72 \\ 125a+25b+5c=180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 72 \\ 180 \end{pmatrix}$

On note : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 108 \\ 72 \\ 180 \end{pmatrix}$.

b) La calculatrice donne : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{40} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ \frac{15}{8} & -\frac{5}{12} & \frac{3}{40} \end{pmatrix}$.

On en déduit : $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{40} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ \frac{15}{8} & -\frac{5}{12} & \frac{3}{40} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 108 \\ 72 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -90 \\ 186 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{cases} a=12 \\ b=-90 \\ c=186 \end{cases}$ On en déduit : $\forall$ t $\in$ [0 ; 5], $v(t) = 12t^3 - 90t^2 + 186t$.