Nom : *Classe* : 1ère Spé Maths G1	**Devoir maison n°1** Suites géométriques à préparer pour le : 03 / 10 / 19	

Exercice 1 : n° 27 p 32

Une solution contient cinq bactéries à l'instant $t = 0$. Après l'ajout d'un élément nutritif, le nombre de bactéries augmente de 25 % chaque seconde.

1. Écrire un algorithme qui donne le nombre de bactéries présentes dans la solution au bout de n secondes.
2. Au bout de combien de secondes le nombre de bactéries va-t-il dépasser 20 000 ?

Exercice 2 : n° 37 p 32

Une maison est louée depuis exactement 10 ans. La 1re année, le loyer mensuel s'élevait à 900 €. Puis, chaque année suivante, ce montant a augmenté de 1 %.

• Calculer la somme totale (au centime d'euro près) représentant l'ensemble des loyers au cours de ces 10 années.

Exercice 3 : n°56 p 35

En informatique, on appelle pourcentage de compression, le pourcentage de réduction de la taille en Ko (kilo octets) d'un fichier après compression.

1. Un fichier a une taille initiale de 800 Ko. Après compression, il mesure 664 Ko. Montrer que le pourcentage de compression est de 17 %.
2. On note t_n la taille en Ko du fichier après n compressions successives au pourcentage de compression de 17 %. On a $t_0 = 800$.

a. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.
b. Exprimer t_n en fonction de n.

3. CALCULATRICE En utilisant la calculatrice ou un tableur, déterminer le nombre minimum de compressions successives à effectuer pour que le fichier ait une taille finale inférieure à 50 Ko.

Exercice 4 : n° 60 p 35

Le taux d'accroissement naturel (augmentation ou diminution annuelle de la population en pourcentage) de la population française est de 0,55 % par an depuis 1999 selon l'Insee.

On estime également que chaque année, le solde migratoire (différence entre le nombre de personnes qui sont entrées sur le territoire et le nombre de personnes qui en sont sorties au cours de l'année) est d'environ 75 000.

En 2018, le nombre d'habitants en France était de 67,2 millions.

On fait l'hypothèse que l'évolution observée perdure et on note p_n le nombre d'habitants estimé (en millier) en France, l'année 2018 + n, avec n entier naturel.

1. Calculer p_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$p_{n+1} = 1{,}0055p_n + 75.$$
3. TABLEUR Compléter la feuille de calcul suivante pour estimer le nombre d'habitants en France en 2060.

B3 =B2*1,0055+75

	A	B	C	D
1	Année	Population		
2	2018	67200		
3	2019	67644,6		
4	2020			

4. On pose $u_n = p_n + 13\,636{,}363\,64$.

a. Démontrer que $u_{n+1} = 1{,}0055u_n$. Quelle est alors la nature de la suite (u_n) ?
b. Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire p_n en fonction de n.

5. Comment vérifier à la calculatrice l'estimation obtenue à la question 3 ?

Nom : *Classe* : 1$^{\text{ère}}$ Spé Maths G1 Le : 03 / 10 / 19	**Test du DM n°1** Suites géométriques	*Note* : … / 10

Je sais :	Evaluation des capacités Non — Oui
Ecrire un algorithme (en langage naturel) et résoudre un problème concret.	
Modéliser puis résoudre un problème à l'aide d'une suite.	
Justifier un taux d'évolution.	
Définir une suite par une relation de récurrence / par une formule explicite.	
Calculer le terme d'une suite.	
Justifier / Démontrer la relation de récurrence qui définit une suite.	
Démontrer qu'une suite est géométrique.	

Exercice 1 : n° 27 p 32 **… / 2,5**

Une solution contient cinq bactéries à l'instant $t = 0$. Après l'ajout d'un élément nutritif, le nombre de bactéries augmente de 25 % chaque seconde.

1. Ecrire un algorithme qui donne le nombre de bactéries présentes dans la solution au bout de n secondes.

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

2. Au bout de combien de secondes le nombre de bactéries dépassera-t-il 20 000 ?

(Aucune justification n'est attendue, vous pourrez utiliser le tableur de la calculatrice pour identifier la réponse)

……………………………………………………………

Exercice 2 : n° 37 p 32 **… / 2,5**

Une maison est louée depuis exactement 10 ans.
La 1$^{\text{ère}}$ année, le loyer mensuel s'élevait à 900 €. Puis, chaque année suivante, ce montant a augmenté de 1 %.
Calculer la somme totale (au centime d'euro près) représentant l'ensemble des loyers au cours de ces 10 ans.

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Exercice 3 : n°56 p 35 **… / 2,5**

En informatique, on appelle pourcentage de compression, le pourcentage de réduction de la taille en Ko (kilo octets) d'un fichier après compression.

1. Un fichier a une taille initiale de 800 Ko. Après compression, il mesure 664 Ko. Montrer que le pourcentage de compression est de 17 %.

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

2. On note t_n la taille en Ko de ce fichier après n compressions successives au pourcentage de compression de 17 %. On a $t_0 = 800$.
a) Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

b) Exprimer t_n en fonction de n.

……………………………………………………………
……………………………………………………………

3. On admet, en utilisant la calculatrice, qu'il faut au minimum 15 compressions successives pour que ce fichier ait une taille finale inférieure à 50 Ko.

Exercice 4 : n° 60 p 35 … / **2,5**

Le taux d'accroissement naturel (augmentation ou diminution annuelle de la population en pourcentage) de la population française est de $0,55$ % par an depuis 1999 selon l'INSEE.

On estime également que chaque année, le solde migratoire (différence entre le nombre de personnes qui sont entrées sur le territoire et le nombre de personnes qui en sont sorties au cours de l'année) est d'environ $75\,000$.

En 2018, le nombre d'habitants en France était de $67,2$ millions. On fait l'hypothèse que l'évolution observée perdure et on note p_n le nombre d'habitants estimé (en millier) en France, l'année $2018+n$, avec n un entier naturel. Ainsi $p_0 = 67\,200$.

1. Calculer p_1

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 1,0055\,p_n + 75$$

3. On admet, en utilisant un tableur, que selon ce modèle il y aura environ $88\,123,5$ milliers d'habitants en France en 2060.

4. On pose $u_n = p_n + 13\,636,36\,364$

   a) Démontrer que $u_{n+1} = 1,0055\,u_n$.
   Quelle est alors la nature de la suite (u_n) ?

   b) Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire p_n en fonction de n.

   c) $2060 = 2018 + 42$
   Ainsi, le calcul de p_{42} à partir de la formule explicite obtenue à la question précédente permet de vérifier l'estimation faite à la question 3.

Correction du Test du DM n°1

Exercice 1 : n° 27 p 32

Une solution contient cinq bactéries à l'instant $t = 0$.
Après l'ajout d'un élément nutritif, le nombre de bactéries augmente de 25 % chaque seconde.

1. Ecrire un algorithme qui donne le nombre de bactéries présentes dans la solution au bout de n secondes.

$b \leftarrow 5$
Pour t allant de 1 à n faire :
 $b \leftarrow b + \dfrac{25}{100} b$ (*)
Fin Pour
Afficher b

(*) ou $b \leftarrow b + 0,25\, b$
ou $b \leftarrow 1,25\, b$

2. Au bout de combien de secondes le nombre de bactéries dépassera-t-il 20 000 ?

(Aucune justification n'est attendue, vous pourrez utiliser le tableur de la calculatrice pour identifier la réponse)

Le nombre de bactéries dépassera 20 000 au bout de 38 s.

Exercice 2 : n° 37 p 32

Une maison est louée depuis exactement 10 ans.
La 1ère année, le loyer mensuel s'élevait à 900 €. Puis, chaque année suivante, ce montant a augmenté de 1 %.
Calculer la somme totale (au centime d'euro près) représentant l'ensemble des loyers au cours de ces 10 ans.

On pose $u_1 = 900 \times 12 = 10\,800$ le loyer annuel payé la 1ère année et u_n celui payé la n-ième année.
Chaque année, les loyers augmentent de 1 %.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{100} u_n$

$u_{n+1} = u_n + 0,01\, u_n = 1,01\, u_n$

On reconnaît la relation de récurrence associée à la suite géométrique de raison $1,01$ et de 1er terme $u_1 = 10\,800$.

En notant S la somme des loyers versés sur les 10 ans, on en déduit :

$$S = u_1 + u_2 + \; + u_{10} = u_1 \times \frac{1-q^{10}}{1-q}$$

$$S = 10\,800 \times \frac{1-1,01^{10}}{1-1,01} \approx 112\,991,90 \text{ €}$$

Exercice 3 : n°56 p 35

En informatique, on appelle pourcentage de compression, le pourcentage de réduction de la taille en Ko (kilo octets) d'un fichier après compression.

1. Un fichier a une taille initiale de 800 Ko. Après compression, il mesure 664 Ko. Montrer que le pourcentage de compression est de 17 %.

On calcule le taux d'évolution t de la valeur initiale $V_0 = 800$ Ko à la valeur $V_1 = 664$ Ko.

$$t = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{664 - 800}{800} = -0,17$$

Le taux de compression est donc bien de 17 %.

2. On note t_n la taille en Ko de ce fichier après n compressions successives au pourcentage de compression de 17 %. On a $t_0 = 800$.

a) Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n - \dfrac{17}{100} t_n$

$t_{n+1} = t_n - 0,17\, t_n = 0,83\, t_n$

b) Exprimer t_n en fonction de n.

On reconnaît la relation de récurrence associée à la suite géométrique de raison $q = 0,83$ et de 1er terme $t_0 = 800$
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 \times q^n = 800 \times 0,83^n$

3. On admet, en utilisant la calculatrice, qu'il faut au minimum 15 compressions successives pour que ce fichier ait une taille finale inférieure à 50 Ko.

Exercice 4 : n° 60 p 35

Le taux d'accroissement naturel (augmentation ou diminution annuelle de la population en pourcentage) de la population française est de $0,55$ % par an depuis 1999 selon l'INSEE.
On estime également que chaque année, le solde migratoire (différence entre le nombre de personnes qui sont entrées sur le territoire et le nombre de personnes qui en sont sorties au cours de l'année) est d'environ $75\,000$.
En 2018, le nombre d'habitants en France était de $67,2$ millions. On fait l'hypothèse que l'évolution observée perdure et on note p_n le nombre d'habitants estimé (en millier) en France, l'année $2018+n$, avec n un entier naturel. Ainsi $p_0 = 67\,200$.

1. Calculer p_1

En 2018, la population française était égale à :
$p_0 = 67\,200$ (en milliers d'habitants.)
De 2018 à 2019, le taux d'accroissement naturel était de $0,55$ % et le solde migratoire de 75 milliers d'habitants.

Ainsi : $p_1 = p_0 + \dfrac{0,55}{100}\,p_0 + 75$
$p_1 = p_0 + 0,0055\,p_0 + 75$
$p_1 = 1,0055\,p_0 + 75$
$p_1 = 1,0055 \times 67\,200 + 75 = 67\,644,6$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$p_{n+1} = 1,0055\,p_n + 75$$

Chaque année, le taux d'accroissement naturel est de $0,55$ % et le solde migratoire est de 75 milliers d'habitants. Ainsi :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + \dfrac{0,55}{100}\,p_n + 75$
$p_{n+1} = p_n + 0,0055\,p_n + 75$
$p_{n+1} = 1,0055\,p_n + 75$

3. On admet, en utilisant un tableur, que selon ce modèle il y aura environ $88\,123,5$ milliers d'habitants en France en 2060.

4. On pose $u_n = p_n + 13\,636,36\,364$

a) Démontrer que $u_{n+1} = 1,0055\,u_n$.
Quelle est alors la nature de la suite (u_n) ?

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n + 13\,636,36\,364$
On en déduit : $u_{n+1} = p_{n+1} + 13\,636,36\,364$
Or : $p_{n+1} = 1,0055\,p_n + 75$
Donc : $u_{n+1} = 1,0055\,p_n + 75 + 13\,636,36\,364$
$u_{n+1} = 1,0055\,p_n + 13\,711,36\,364$
Or : $u_n = p_n + 13\,636,36\,364 \Leftrightarrow p_n = u_n - 13\,636,36\,364$
Donc :
$u_{n+1} = 1,0055\,(u_n - 13\,636,36\,364) + 13\,711,36\,364$
$u_{n+1} = 1,0055\,u_n - 13\,711,36\,364 + 13\,711,36\,364$
$u_{n+1} = 1,0055\,u_n$
On reconnaît la relation de récurrence associée à une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire p_n en fonction de n.

(u_n) est géométrique de raison $q = 1,0055$ et de 1er terme : $u_0 = p_0 + 13\,636,36\,364$
$u_0 = 67\,200 + 13\,636,36\,364$
$u_0 = 80\,836,36\,364$
Ainsi :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$
$u_n = 80\,836,36\,364 \times 1,0055^n$
On en déduit :
$p_n = u_n - 13\,636,36\,364$
$p_n = 80\,836,36\,364 \times 1,0055^n - 13\,636,36\,364$

c) $2060 = 2018 + 42$
Ainsi, le calcul de p_{42} à partir de la formule explicite obtenue à la question précédente permet de vérifier l'estimation faite à la question 3.