Nom : Classe : T ES A rendre pour le : 04 / 01 /17	**Devoir maison n°2** *Fonction exponentielle*	Note :

	Avis de l'élève		Avis du professeur	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Lire / Interpréter des résultats graphiquement.				
Dériver.				
Etudier le signe d'une fonction / Dresser un tableau de signe.				
Déterminer les variations d'une fonction.				
Justifier qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle. Estimer cette solution.				
Répondre à une question en lien avec l'économie en passant par l'étude d'une fonction.				
Compléter un tableau de valeurs / Construire une courbe point par point.				
Déterminer l'équation d'une tangente.				
Justifier la position relative d'une courbe et d'une tangente.				

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE* (Bio Bois Energie) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités. L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle [1 ; 15] par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + e^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

Dans l'entreprise *BBE*, le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros. La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur [1 ; 15] par :

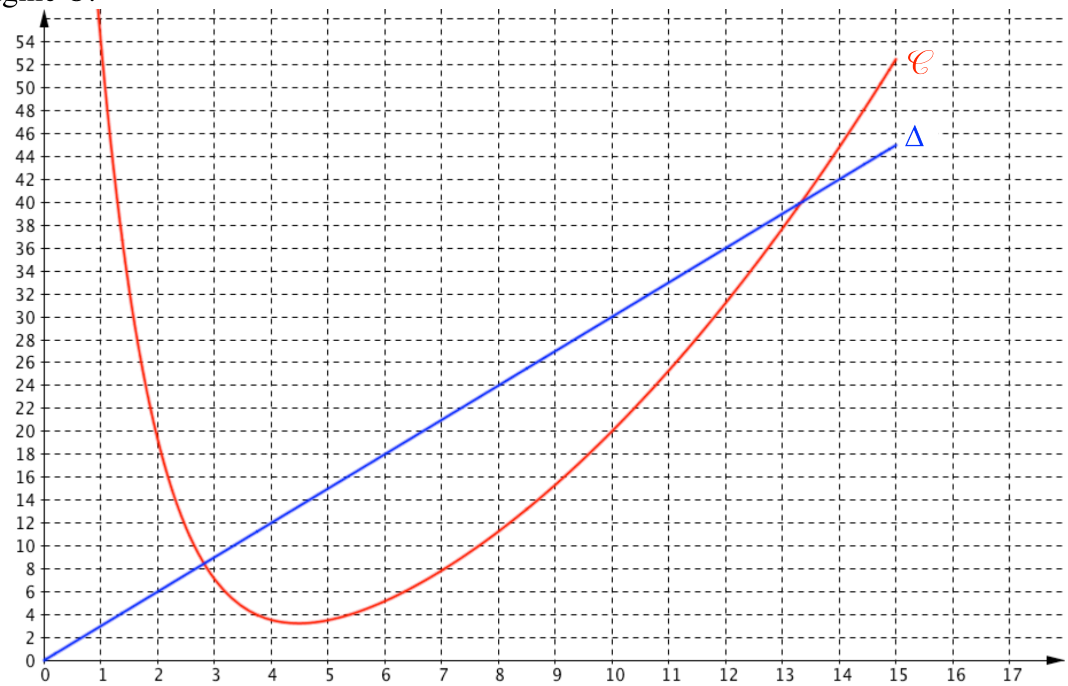
$$R(x) = 3x$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Etude graphique

Sur le graphique suivant, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.



Dans cette partie, répondre aux questions à l'aide du graphique, avec la précision permise par celui-ci.
Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût de fabrication quotidien de l'entreprise est minimal.

2. a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

   b) Déterminer les quantités possibles de granulés que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Etude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [1 ; 15] par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur [1 ; 15] et on note g' sa dérivée.

1. a) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle [1 ; 15].

   b) Dresser le tableau des variations de g sur l'intervalle [1 ; 15] en arrondissant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ à l'unité près.

2. a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 15].

   b) Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle [1 ; 15].

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] on a :
$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle [1 ; 15] et on note D' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] on a : $D'(x) = g(x)$.

3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle [1 ; 15].

4. a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

   b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

5. a) Compléter un tableau des valeurs de $D(x)$ sur l'intervalle [1 ; 15] avec un pas de 1.

   b) En déduire la construction de la portion de courbe $\mathscr{D}$, associée à la fonction D, située au dessus de l'axe des abscisses, sur le graphique précédent.

   c) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{D}$ au point d'abscisse 5. La tracer sur le graphique.

   d) Justifier la position relative de T et de $\mathscr{D}$.

Correction du DM n°2

Fonction exponentielle

L'entreprise *BBE* (Bio Bois Energie) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités. L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle [1 ; 15] par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + e^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

Dans l'entreprise *BBE*, le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros. La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur [1 ; 15] par :

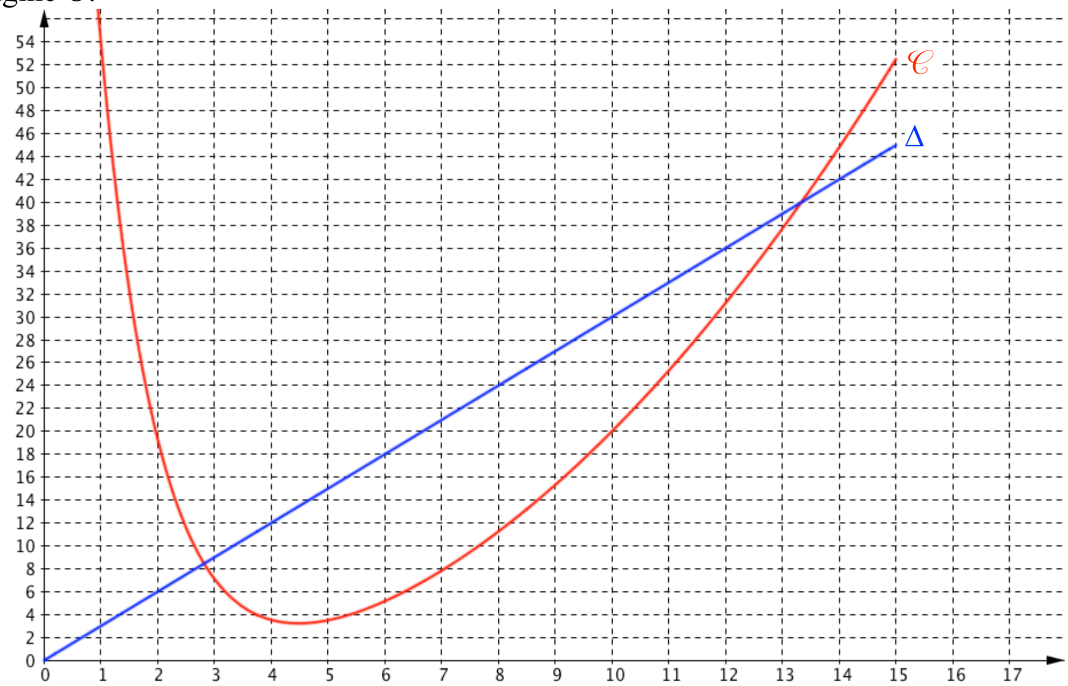
$$R(x) = 3x$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Etude graphique

Sur le graphique suivant, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.



Dans cette partie, répondre aux questions à l'aide du graphique, avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Le coût de fabrication quotidien de l'entreprise semble minimal pour une production de 4,5 t de granulés
2. a) Graphiquement, on lit : $C(6) \approx 5$ et $R(6) \approx 18$.
   On en déduit : $D(6) = R(6) - C(6) \approx 13$.
   Lorsqu'elle produit et vend 6 tonnes de granulés, l'entreprise réalise un résultat net quotidien d'environ 1 300 euros (13 centaines d'euros).

   b) L'entreprise dégage un résultat net quotidien positif lorsque la recette quotidienne est supérieure au coût de fabrication quotidiens. C'est apparemment le cas lorsqu'elle vend entre 2,8 t et 13,4 t de granulés

Partie B : Etude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [1 ; 15] par :

$$g(x) = \text{-}0,6x + 4 + e^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur [1 ; 15] et on note g' sa dérivée.

1. a) $\forall\ x \in [1\ ;\ 15]$, $g(x) = \text{-}0,6x + 4 + e^{-x+5} = \text{-}0,6x + 4 + e^{u(x)}$

   $g'(x) = \text{-}0,6 + u'(x)e^{u(x)}$ avec : $u(x) = -x + 5$ et : $u'(x) = -1$

   $g'(x) = \text{-}0,6 - e^{-x+5}$

   $\forall\ x \in [1\ ;\ 15]$, $e^{-x+5} > 0$ donc : $g'(x) = \text{-}0,6 - e^{-x+5} < 0$

   On en déduit que la fonction g est décroissante sur l'intervalle [1 ; 15].

   b) Tableau de variations de g, avec des valeurs arrondies à l'unité pour $g(1)$ et $g(15)$:

x	1	15
$g(x)$	58 $\searrow$	-5

2. a) La fonction g est continue et strictement décroissante sur [1 ; 15].

   $\forall\ x \in [1\ ;\ 15]$, $g(x) \in [-5\ ;\ 58]$.

   Or : $0 \in [-5\ ;\ 58]$

   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 15].

   b) $g(\alpha) = 0$

   On a : $g(6) \approx 0{,}77 > 0$ et : $g(7) \approx -0{,}06 < 0$ Donc : $6 < \alpha < 7$

   On a : $g(6,9) \approx 0{,}01 > 0$ et : $g(7) \approx -0{,}06 < 0$ Donc : $6{,}9 < \alpha < 7$

   6,9 est une valeur approchée de α à 0,1 près.

   Remarque : 7 est aussi une valeur approchée de α à 0,1 près.

3. D'après le tableau de variations précédent, la fonction g est décroissante, d'abord à valeurs positives puis à valeurs négatives. De plus, nous venons de justifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle [1 ; 15]. On en déduit le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle [1 ; 15] :

x	1		α		15
$g(x)$		+	0	$-$	

Avec : $\alpha \approx 6{,}9$

Partie C : Application économique

1. Le résultat net quotidien $D(x)$ est défini par la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$.

   Donc : $\forall\ x \in [1\ ;\ 15]$, $D(x) = R(x) - C(x) = 3x - (0,3x^2 - x + e^{-x+5}) = \text{-}0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$

2. $\forall\ x \in [1\ ;\ 15]$, $D(x) = \text{-}0,3x^2 + 4x - e^{-x+5} = \text{-}0,3x^2 + 4x - e^{u(x)}$

   $D'(x) = \text{-}0,3 \times 2x + 4 - u'(x)e^{u(x)}$ avec : $u(x) = -x + 5$ et : $u'(x) = -1$

   $D'(x) = \text{-}0,6x + 4 + 1e^{-x+5} = g(x)$

3. On a étudié le signe de $g(x) = D'(x)$ dans la partie B.

   On en déduit le tableau de variations de D, avec des valeurs arrondies à l'unité :

x	1		α		15
$D'(x)$		+	0	$-$	
$D(x)$	-51	$\nearrow$		$\searrow$	-8

Avec : $\alpha \approx 6{,}9$

4. a) La fonction D indique un bénéfice lorsqu'elle prend une valeur positive. Sinon elle indique un déficit.

   On peut estimer que l'entreprise rendra son bénéfice quotidien maximal en vendant 6,9 t de granulés.

   b) $D(6,9) \approx 13{,}17$.

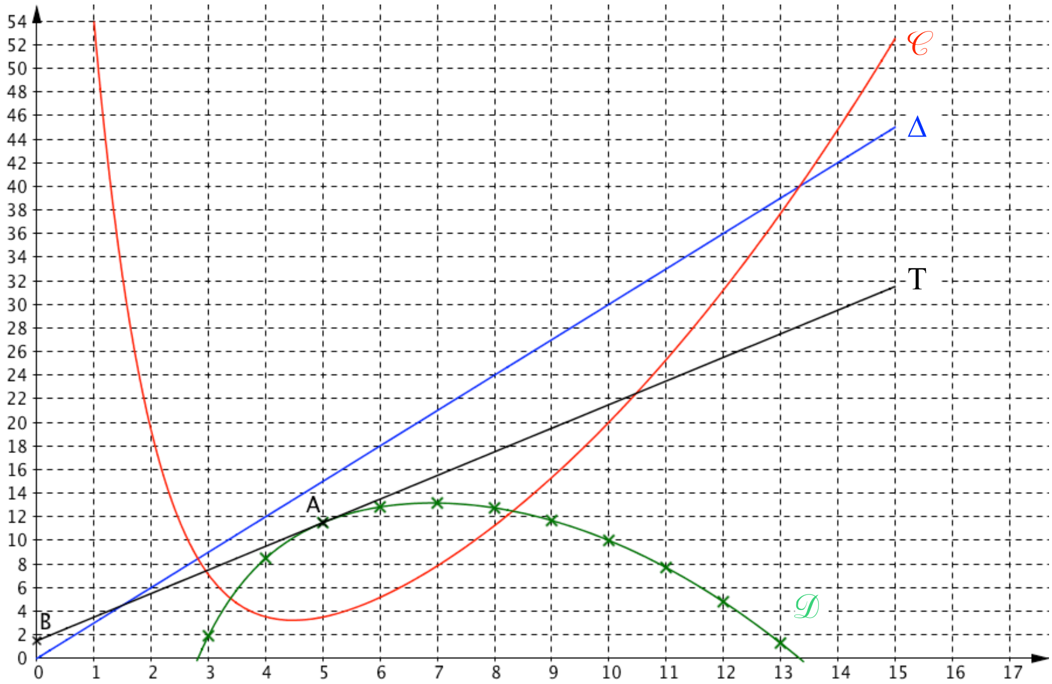
   Le bénéfice quotidien maximal atteint est d'environ 1 317 euros (13,17 centaines d'euros).

5. a) Compléter un tableau des valeurs de $D(x)$ sur l'intervalle [1 ; 15] avec un pas de 1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$D(x)$	- 50,9	- 13,3	1,9	8,5	11,5	12,8	13,2	12,8	11,7	10	7,7	4,8	1,3	- 2,8	- 7,5

Remarque : les résultats sont arbitrairement arrondis au dixième près.

b) On en déduit la construction de la portion de courbe $\mathscr{D}$, associée à la fonction D, située au dessus de l'axe des abscisses, sur le graphique précédent.



c) $D(5) = -0,3 \times 5^2 + 4 \times 5 - e^{-5+5} = -7,5 + 20 - e^0 = 12,5 - 1 = 11,5$

$D'(5) = g(5) = -0,6 \times 5 + 4 + e^{-5+5} = -3 + 4 + 1 = 2$

La tangente T à $\mathscr{D}$ au point d'abscisse 5 a donc pour équation : $y = D'(5)(x-5) + D(5)$

$y = 2(x-5) + 11,5$

$y = 2x - 10 + 11,5$

$y = 2x + 1,5$

Méthode : On sait que T est la tangente à $\mathscr{D}$ au point d'abscisse 5 repéré par A sur le graphique.
Pour tracer T, on calcule les coordonnées d'un autre point de la droite, puis on trace la droite (AB)

Si $x = 0$ alors $y = 1,5$. Le point B (0 ; 1,5) appartient à T.

d) Puisque $D' = g$ alors $D'' = g'$.

On a vu dans la partie B que : $\forall\ x \in [1 ; 15]$, $g'(x) < 0$. Ainsi : $D''(x) < 0$.

On en déduit que D est concave sur $[1 ; 15]$ et que sa courbe représentative $\mathscr{D}$ est située en dessous de ses tangentes sur cet intervalle ; ce qui justifie que $\mathscr{D}$ est située en dessous de T.

Nom : Classe : T ES le : 04 / 01 /17	**Test du DM n°2** *Fonction exponentielle*	Note :

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE* (Bio Bois Energie) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités. L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle [1 ; 15] par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + e^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

Dans l'entreprise *BBE*, le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros. La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur [1 ; 15] par :

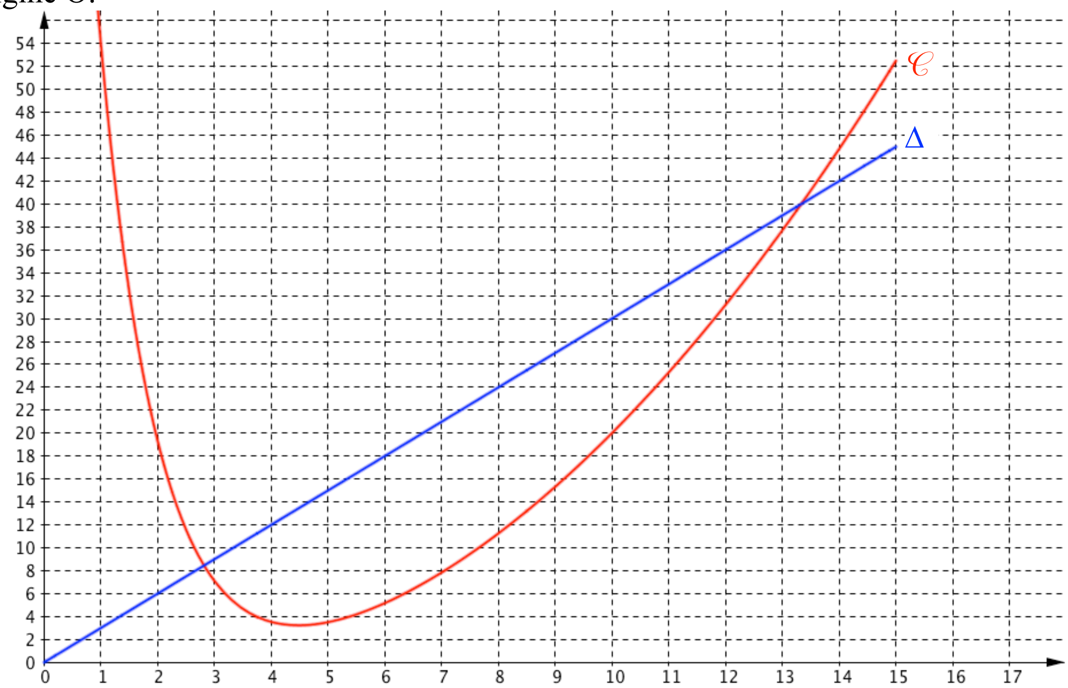
$$R(x) = 3x$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Etude graphique

Sur le graphique suivant, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.



Dans cette partie, répondre aux questions à l'aide du graphique, avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Le coût de fabrication quotidien de l'entreprise semble minimal pour une production de 4,5 t de granulés
2. a) Graphiquement, on lit : $C(6) \approx 5$ et $R(6) \approx 18$.
   On en déduit : $D(6) = R(6) - C(6) \approx 13$.
   Lorsqu'elle vend 6 tonnes de granulés, l'entreprise réalise un résultat net quotidien d'environ 1 300 euros (13 centaines d'euros).

   b) Déterminer les quantités possibles de granulés que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.
   …………………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………………

Partie B : Etude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [1 ; 15] par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur [1 ; 15] et on note g' sa dérivée.

1. a) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle [1 ; 15].

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

b) Tableau de variations de g, avec des valeurs arrondies à l'unité pour $g(1)$ et $g(15)$:

x	1		15
$g(x)$	58	$\searrow$	-5

2. a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 15].

....
....
....
....
....
....

b) Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

....
....
....
....
....
....
....
....

3. D'après le tableau de variations précédent, la fonction g est décroissante, d'abord à valeurs positives puis à valeurs négatives. De plus, nous venons de justifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle [1 ; 15]. On en déduit le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle [1 ; 15] :

x	1		α		15
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$$

....
....

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] on a : $D'(x) = g(x)$.

3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle [1 ; 15].

....
....
....
....
....
....
....
....

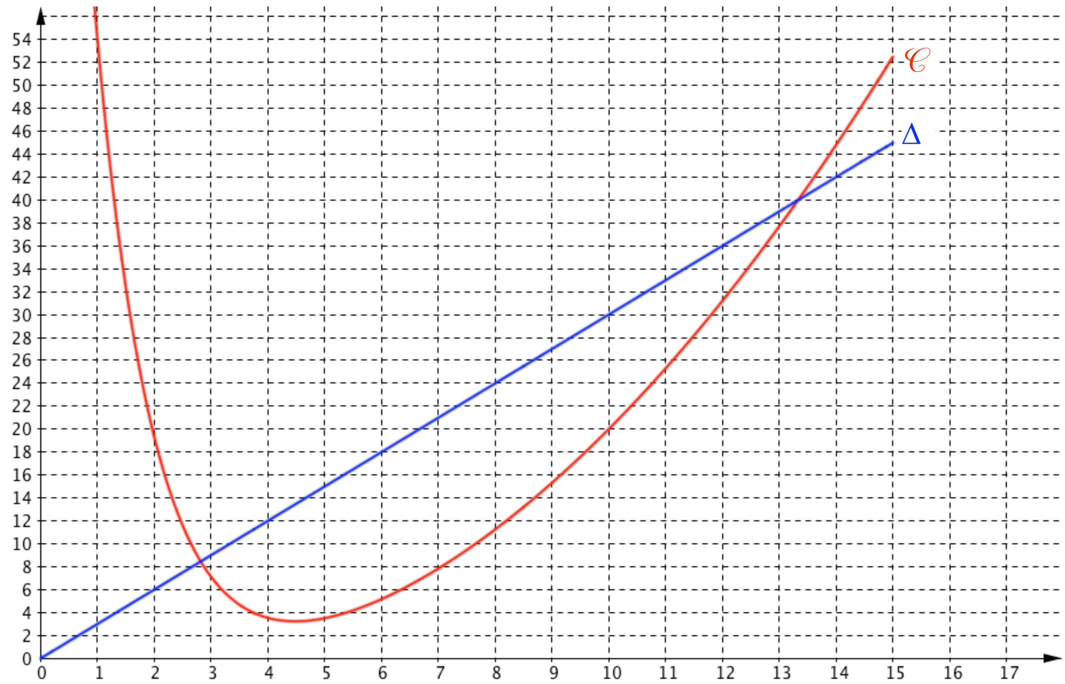
4. a) La fonction D indique un bénéfice lorsqu'elle prend une valeur positive. Sinon elle indique un déficit. On peut estimer que l'entreprise rendra son bénéfice quotidien maximal en vendant 6,9 t de granulés.

   b) Le bénéfice quotidien maximal atteint est d'environ 1 317 euros (13,17 centaines d'euros).

5. a) Compléter un tableau des valeurs de $D(x)$ sur l'intervalle [1 ; 15] avec un pas de 1.
   Arrondir les résultats au dixième près.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$D(x)$															

   b) En déduire la construction de la portion de courbe $\mathscr{D}$, associée à la fonction D, située au dessus de l'axe des abscisses, sur le graphique précédent.



   c) On admet que la tangente T à $\mathscr{D}$ au point d'abscisse 5 a pour équation $y = 2x + 1,5$. La tracer.

   d) Justifier la position relative de T et de $\mathscr{D}$.

....
....
....
....
....