Nom : *Classe* : TS 5 *A préparer pour le* : 01 / 10 /18	**Devoir maison n°1** *Raisonnements par récurrence et suites*	*Note* : … / 10

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Démontrer par récurrence.				
Utiliser le tableur de la calculatrice pour calculer les premiers termes d'une suite.				
Conjecturer le sens de variations d'une suite.				
Valider une conjecture.				

Exercice n° 56 p 21 : Le symbole $\prod$

On utilise le symbole Π pour écrire un **produit de nombres dépendant d'un entier *k*.**
Par exemple, le produit des nombres de la forme $2k+1$ pour k allant de 1 à 10 se note :

$$\prod_{k=1}^{k=10}(2k+1) = 3\times5\times7\times\ldots\times21.$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$P_n = \prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $P_n = \frac{n+1}{2n}$.

Exercice n° 61 p 22 : Extrait de bac.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times0{,}5^n \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. a. CALCULATRICE Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n), approchées à 10^{-2} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times0{,}5^n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$.
Valider alors la conjecture faite en **1. b**.

Correction du DM n°1

Exercice n° 56 p 21 :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$P_n = \prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $P_n = \frac{n+1}{2n}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ on pose $\mathscr{P}(n)$: $\prod_{k=2}^{k=n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.

- Initialisation :
  On a : $\prod_{k=2}^{k=2}(1-\frac{1}{k^2}) = 1-\frac{1}{2^2} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
  Et : $\frac{2+1}{2\times 2} = \frac{3}{4}$
  Donc $\prod_{k=2}^{k=2}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{2+1}{2\times 2}$. Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit p un entier naturel tel que $p \geq 2$.
  Supposons que $\mathscr{P}(p)$ soit vraie. Alors : $\prod_{k=2}^{k=p}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{p+1}{2p}$
  Montrons que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie aussi, c'est-à-dire : $\prod_{k=2}^{k=p+1}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{p+2}{2(p+1)}$
  $$\prod_{k=2}^{k=p+1}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{k=p}(1-\frac{1}{k^2}) \times (1-\frac{1}{(p+1)^2}) = \frac{p+1}{2p} \times (1-\frac{1}{(p+1)^2}) = \frac{p+1}{2p} \times \frac{(p+1)^2-1}{(p+1)^2}$$
  $$\prod_{k=2}^{k=p+1}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{(p+1)^2-1}{2p(p+1)} = \frac{p^2+2p+1-1}{2p(p+1)} = \frac{p^2+2p}{2p(p+1)} = \frac{p+2}{2(p+1)}$$
  Ainsi $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

- Conclusion :
  $\mathscr{P}(2)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$: $\prod_{k=2}^{k=n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$

Exercice n° 61 p 22 :

Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

1. a) En utilisant le menu SUITE de la calculatrice on obtient le tableau des valeurs suivant, en arrondissant à 10^{-2} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

   b) Le calcul des premiers termes permet de conjecturer que la suite (u_n) serait décroissante <u>sur $\mathbb{N}$*.</u>

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n \geq \frac{15}{4}\times 0,5^n$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geq \frac{15}{4}\times 0,5^n$

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- Initialisation :
  On a : $u_1 = 3,4$
  Et : $\frac{15}{4}\times 0,5^1 = \frac{15}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{8} = 1{,}875$
  Donc : $u_1 \geq \frac{15}{4}\times 0,5^1$ Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit k un entier naturel tel que $k \geq 1$.
  Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors : $u_k \geq \frac{15}{4}\times 0,5^k$
  En multipliant chaque membre de l'inégalité par $\frac{1}{5} > 0$ on obtient :
  $$\frac{1}{5}u_k \geq \frac{1}{5} \times \frac{15}{4}\times 0,5^k$$
  $$\frac{1}{5}u_k \geq \frac{3}{4}\times 0,5^k$$
  On en déduit :
  $$\frac{1}{5}u_k + 3 \times 0,5^k \geq \frac{3}{4}\times 0,5^k + 3 \times 0,5^k$$
  $$u_{k+1} \geq \left(\frac{3}{4} + 3\right)\times 0,5^k$$
  $$u_{k+1} \geq \frac{15}{4}\times 0,5^k$$
  Or : $\frac{15}{4}\times 0,5^k > \frac{15}{4}\times 0,5^k \times 0,5$
  Donc :
  $$u_{k+1} \geq \frac{15}{4}\times 0,5^{k+1}$$
  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
  $\mathscr{P}(1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \frac{15}{4}\times 0,5^n$

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Valider alors la conjecture faite en 1.b)

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n = \frac{-4}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$

Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \frac{15}{4}\times 0,5^n$

Ainsi, en multipliant membre à membre par $\frac{-4}{5} < 0$ puis en additionnant $3 \times 0,5^n$ on obtient :

$$\frac{-4}{5}u_n \leq \frac{-4}{5} \times \frac{15}{4}\times 0,5^n$$
$$\frac{-4}{5}u_n \leq -3 \times 0,5^n$$
$$\frac{-4}{5}u_n + 3 \times 0,5^n \leq -3 \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n$$
$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

On en déduit : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_n$

La suite (u_n) est donc bien décroissante sur $\mathbb{N}^*$.