Nom : Groupe : TMATHS1	**Test du DM n°2**	Le 23 / 11 / 22 Note : … / 15

Exercice 1 : n° 22 p 96

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g.

2. Étudier les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. CALCULATRICE Dresser le tableau de variation de la fonction g et vérifier graphiquement, à l'aide de la calculatrice, les résultats trouvés.

Exercice 2 : n° 40 p 97

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n + 2}}.$$

- Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 : n° 24 p 96

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{4-2x}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.

2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.

3. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 2 (on distinguera les cas $x<2$ et $x>2$).
En déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats trouvés.

Exercice 4 : n° 42 p 97

déterminer la limite de la suite de terme général :

$$v_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}.$$

Correction du DM n°2

Exercice 1 : n° 22 p 96

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g.

2. Étudier les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. CALCULATRICE Dresser le tableau de variation de la fonction g et vérifier graphiquement, à l'aide de la calculatrice, les résultats trouvés.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$

$g'(x) = 3x^2 - 2x - 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (\text{-}5) = 4 + 60 = 64 > 0$

On en déduit que g' admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{\text{-}b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8}{6} = \text{-}1$$

et $x_2 = \dfrac{\text{-}b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+8}{6} = \dfrac{5}{3}$

g' est du signe de $a = 3 > 0$, sauf entre ses racines.

Autrement dit :

- $\forall\, x \in]\text{-}\infty\,;\, \text{-}1\,[\cup]\,\frac{5}{3}\,;\, +\infty\,[$, $g'(x) > 0$
- $\forall\, x \in]\,\text{-}1\,;\, \frac{5}{3}\,[$, $g'(x) < 0$

On en déduit que g est croissante sur $]\,\text{-}\infty\,;\, \text{-}1\,]$ puis décroissante sur $[\,\text{-}1\,;\, \frac{5}{3}\,]$ avant de redevenir croissante sur $[\,\frac{5}{3}\,;\, +\infty\,[$.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré. On en déduit :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - x^2 - 5x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- et $\lim\limits_{x \to \text{-}\infty} x^3 - x^2 - 5x + 1 = \lim\limits_{x \to \text{-}\infty} x^3 = \text{-}\infty$

3. On détermine les extrema locaux :

$g(\text{-}1) = (\text{-}1)^3 - (\text{-}1)^2 - 5 \times (\text{-}1) + 1$

$g(\text{-}1) = \text{-}1 - 1 + 5 + 1 = 4$

$g(\frac{5}{3}) = \frac{125}{27} - \frac{25}{9} - \frac{25}{3} + 1 = \frac{\text{-}148}{27}$

puis on dresse le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$\frac{-148}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2 : n° 40 p 97

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n+2}}.$$

- Déterminer la limite de la suite (u_n).

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^2+1}{n+2} = \frac{n(n+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{2}{n})} = \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

On en déduit, par sommes :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n + \frac{1}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$

Puis, par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = +\infty$

Or, $\lim\limits_{N \to +\infty} \sqrt{N} = +\infty$

Ainsi, par composée de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 3 : n° 24 p 96

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{4-2x}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.
3. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 2 (on distinguera les cas $x<2$ et $x>2$).
En déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats trouvés.

1. $\forall\, x \in]\text{-}\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[,\ f(x)=\dfrac{x}{4-2x}$

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=4-2x$

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1(4-2x)-(\text{-}2)x}{(4-2x)^2}=\frac{4-2x+2x}{(4-2x)^2}=\frac{4}{(4-2x)^2}$$

$4>0$ et $\forall\, x \in]\text{-}\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[,\ (4-2x)^2>0$

Donc $\forall\, x \in]\text{-}\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[,\ f'(x)>0$

On en déduit que f est croissante sur $]\text{-}\infty\,;2[$ puis sur $]2\,;+\infty[$.

2. $\forall\, x \in]\text{-}\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[,\ f(x)=\dfrac{x}{4-2x}$

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par celui du dénominateur.

On en déduit :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\text{-}2x}=\frac{\text{-}1}{2}$
- et $\displaystyle\lim_{x\to\text{-}\infty}\frac{x}{4-2x}=\lim_{x\to\text{-}\infty}\frac{x}{\text{-}2x}=\frac{\text{-}1}{2}$

Ainsi, la droite d'équation $y=\dfrac{\text{-}1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $\text{-}\infty$ et en $+\infty$.

3. $4-2x>0 \Leftrightarrow 4>2x \Leftrightarrow x<2$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}4-2x=0^+$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}4-2x=0^-$

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to2}x=2>0$

Donc, par quotient de limites :

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=\text{-}\infty$$

Ainsi, la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

4. On dresse le tableau de variation de f :

x	$\text{-}\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
f	$\frac{\text{-}1}{2}$ ↗ $+\infty$	‖	$\text{-}\infty$ ↗ $\frac{\text{-}1}{2}$

Exercice 4 : n° 42 p 97

déterminer la limite de la suite de terme général :

$$v_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}.$$

On pose $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}$

$$v_n=\frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}$$

$$v_n=\frac{(\sqrt{2n+3})^2-(\sqrt{2n+1})^2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}$$

$$v_n=\frac{2n+3-(2n+1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}$$

$$v_n=\frac{2n+3-2n-1}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}=\frac{2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}$$

On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}2n+3=\lim_{n\to+\infty}2n+1=+\infty$

Or, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sqrt{N}=+\infty$

Ainsi, par composée de limites :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+3}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}=+\infty$$

On en déduit, par somme :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}=+\infty$$

Puis, par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}=0$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=0$