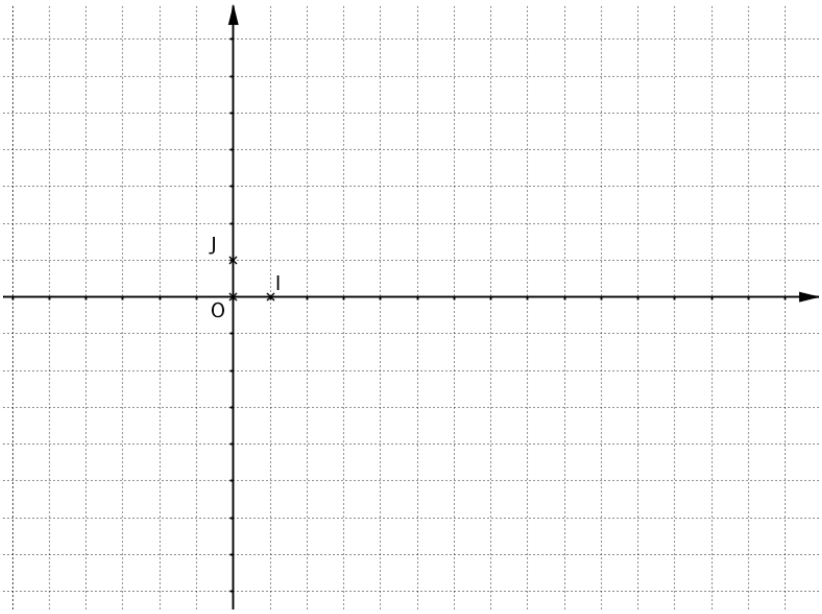
Nom : Classe : 2^{nde} 2 / 2^{nde} 5	**Devoir maison n°2** Géométrie plane à préparer pour le : 05 / 11 / 18	Note : … / 10

	Avis de l'élève		Avis du professeur	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Placer des points dans un repère.				
Justifier la nature d'un triangle.				
Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.				
Calculer les coordonnées du symétrique d'un point par rapport à un autre.				
Justifier la nature d'un quadrilatère.				
Déterminer si un point appartient à un cercle.				
Déterminer si un triangle est rectangle.				
Déterminer si des droites sont parallèles.				
Calculer une aire.				

Exercice 1 : On se place dans le repère orthonormé $(O;I,J)$ ci-dessous. Soit $A(-2\ ;-1)$, $B(2\ ;-4)$ et $C(5\ ;0)$.

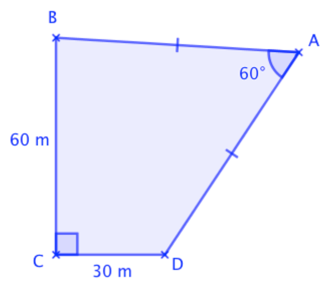
1. Placer les points A, B et C. Compléter la figure au fur et à mesure de l'exercice.



2. Démontrer la nature complète du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du milieu Ω de [AC].
4. D est le symétrique de B par rapport à Ω. Calculer les coordonnées de D.
5. Démontrer la nature complète du quadrilatère ABCD.
6. Ω est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au quadrilatère ABCD. On admet que son rayon vaut $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
   a) Le point $E(2\ ;3)$ appartient-il à $\mathscr{C}$? Justifier.
   b) Que peut-on en déduire pour le triangle AEC ? Justifier.
7. F est le point d'ordonnée négative tel que AF = 6 et CF = 4.
   Le triangle ACF est-il rectangle ? Justifier.
8. M est le point de [AB] tel que AM = 8. N est le point de [AC] tel que AN = $8\sqrt{2}$.
   Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 2 :

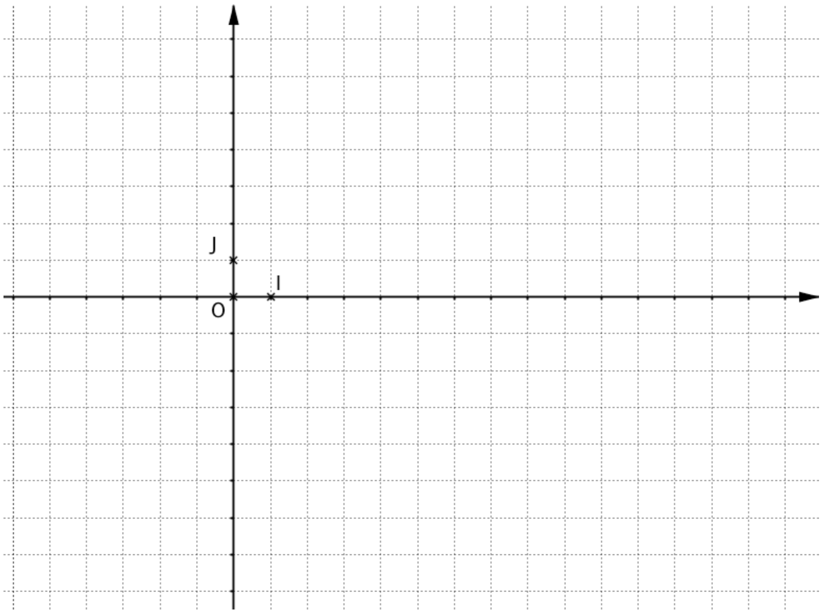
Un terrain constructible à la forme ci-contre.
Le vendeur estime sa superficie à 2850 m^2 environ.
A un mètre carré près, cette estimation est-elle bonne ? Justifier.



Nom : *Classe* : 2^{nde} 2 / 5 *le* : 05 / 11 / 18	**Test du DM n°2** Géométrie plane	*Note* : … / 10

Exercice 1 : On se place dans le repère orthonormé $(O;I,J)$ ci-dessous. Soit $A(-2\ ;-1)$, $B(2\ ;-4)$ et $C(5\ ;0)$.

1. Placer les points A, B et C. Compléter la figure au fur et à mesure de l'exercice.



2. Démontrer la nature complète du triangle ABC.

3. Calculer les coordonnées du milieu Ω de [AC].

4. On admet que Ω a pour coordonnées $(\frac{3}{2}\ ;\frac{-1}{2})$.
   D est le symétrique de B par rapport à Ω. Calculer les coordonnées de D.

5. On admet que D a pour coordonnées $(1\ ;\ 3)$. Démontrer la nature complète du quadrilatère ABCD.

6. Ω est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au quadrilatère ABCD. On admet son rayon : $\sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

   a) Le point $E(2\ ;\ 3)$ appartient-il à $\mathscr{C}$? Justifier (calcul fractionnaire attendu).

   b) Que peut-on en déduire pour le triangle AEC ? Justifier.

Réponse donnée :
On sait que le point E appartient au cercle de centre Ω et que Ω est le milieu de [AC].
Autrement dit, E appartient au cercle de diamètre [AC].
Or si un point M appartient au cercle de diamètre [AB] alors le triangle AMB est rectangle en M.
On en déduit que le triangle AEC est rectangle en E.

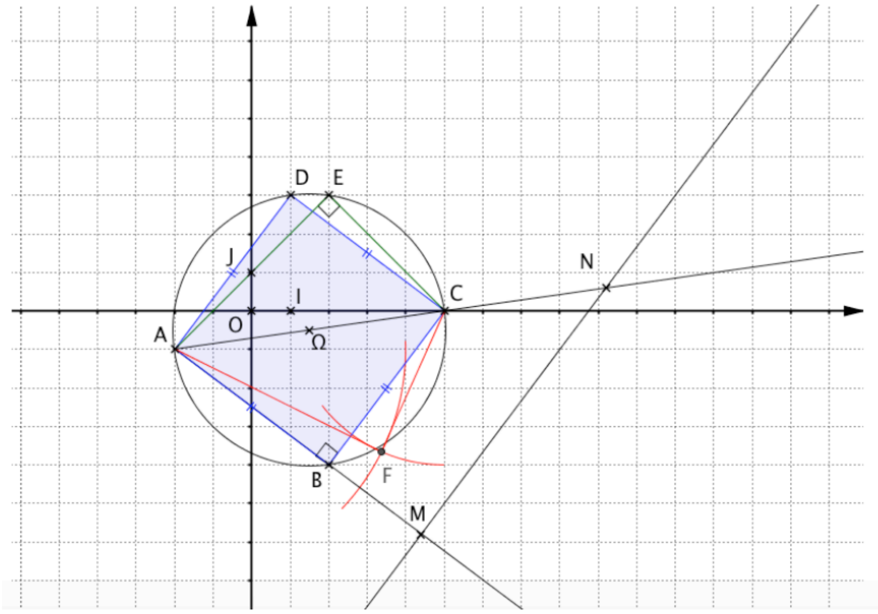
7. F est le point d'ordonnée négative tel que AF = 6 et CF = 4. On rappelle que AC = $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
   Le triangle ACF est-il rectangle ? Justifier.

8. M est le point de [AB) tel que AM = 8. N est le point de [AC) tel que AN = $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.
   On rappelle que AB = 5 et AC = $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
   Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Correction du DM n°2

Exercice 1 : On se place dans le repère orthonormé $(O;I,J)$ ci-dessous. Soit $A(-2\,;-1)$, $B(2\,;-4)$ et $C(5\,;0)$.

1. Placer les points A, B et C. Compléter la figure au fur et à mesure de l'exercice.



2. Démontrer la nature complète du triangle ABC.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5+2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

AB = BC donc le triangle ABC est isocèle en B.

De plus :

- D'une part : $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$
- D'autre part : $AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$

Donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est aussi rectangle en B.

3. Calculer les coordonnées du milieu Ω de [AC].

Ω est le milieu de [AC] donc :

$x_\Omega = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $y_\Omega = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+0}{2} = \frac{-1}{2}$

4. On admet que Ω a pour coordonnées $(\frac{3}{2}\,;\frac{-1}{2})$.
   D est le symétrique de B par rapport à Ω. Calculer les coordonnées de D.

Si D est le symétrique de B par rapport à Ω alors Ω est le milieu de [BD].

On en déduit : $x_\Omega = \frac{x_B + x_D}{2}$ $\qquad$ et : $y_\Omega = \frac{y_B + y_D}{2}$

Donc :

$\frac{3}{2} = \frac{2 + x_D}{2}$ $\qquad$ $\frac{-1}{2} = \frac{-4 + y_D}{2}$

$3 = 2 + x_D$ $\qquad$ $-1 = -4 + y_D$

$3 - 2 = x_D$ $\qquad$ $-1 + 4 = y_D$

$x_D = 1$ $\qquad$ $y_D = 3$

5. On admet que D a pour coordonnées $(1\,;3)$. Démontrer la nature complète du quadrilatère ABCD.

Les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD ont le même milieu. Donc ABCD est un parallélogramme.
De plus, le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.
Or un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle et un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un carré. On en déduit que ABCD est un carré.

6. Ω est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au quadrilatère ABCD. On admet son rayon : $\sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

   a) Le point E(2 ; 3) appartient-il à $\mathscr{C}$? Justifier (calcul fractionnaire attendu).

$\Omega\text{E} = \sqrt{(x - x_\text{E})^2 + (y - y_\text{E})^2} = \sqrt{(\frac{3}{2} - 2)^2 + (\text{-}\frac{1}{2} - 3)^2}$

$\Omega\text{E} = \sqrt{(\frac{3}{2} - \frac{4}{2})^2 + (\text{-}\frac{1}{2} - \frac{6}{2})^2} = \sqrt{(\frac{\text{-}1}{2})^2 + (\text{-}\frac{7}{2})^2}$

$\Omega\text{E} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

On retrouve le rayon du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω donc E appartient à $\mathscr{C}$.

   b) Que peut-on en déduire pour le triangle AEC ? Justifier.

Réponse donnée :
On sait que le point E appartient au cercle de centre Ω et que Ω est le milieu de [AC].
Autrement dit, E appartient au cercle de diamètre [AC].
Or si un point M appartient au cercle de diamètre [AB] alors le triangle AMB est rectangle en M.
On en déduit que le triangle AEC est rectangle en E.

7. F est le point d'ordonnée négative tel que AF = 6 et CF = 4. On rappelle que AC = $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
   Le triangle ACF est-il rectangle ? Justifier.

On a : AF = 6 ; CF = 4 et AC = $5\sqrt{2} \approx 7,07$
Donc [AC] est le plus grand côté du triangle ACF.
D'une part : AF^2 + CF^2 = $6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$
D'autre part : AC^2 = $\sqrt{50}^2 = 50$
Donc : AC^2 ≠ AF^2 + CF^2
Ainsi, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ACF n'est pas rectangle.

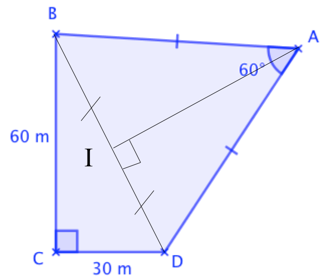
8. M est le point de [AB) tel que AM = 8. N est le point de [AC) tel que AN = $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.
   On rappelle que AB = 5 et AC = $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
   Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

On sait que :
- les points A, B et M sont alignés dans le même ordre que les points A, C et N
- $\frac{\text{AB}}{\text{AM}} = \frac{5}{8}$
- $\frac{\text{AC}}{\text{AN}} = \frac{5\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{5}{8}$

$\frac{\text{AB}}{\text{AM}} = \frac{\text{AC}}{\text{AN}}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exercice 2 :

Un terrain constructible à la forme ci-contre.
Le vendeur estime sa superficie à 2850 m^2 environ.
A un mètre carré près, cette estimation est-elle bonne ? Justifier.



Le triangle BCD est rectangle en C donc, d'après le théorème de Pythagore :
$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 60^2 + 30^2 = 3600 + 900 = 4500$
$BD > 0$ donc $BD = \sqrt{4500} = 30\sqrt{5}$

Le triangle ABD est isocèle en A.
Or, dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice de la base.
En notant I le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABD, on en déduit que I est aussi le milieu de [BD].
Donc $BI = \frac{BD}{2} = \frac{30\sqrt{5}}{2} = 15\sqrt{5}$

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de même mesure. Donc $\widehat{DBA} = \widehat{BDA}$.
De plus, $\widehat{BAD} = 60°$ et la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°.
Donc $\widehat{DBA} = \widehat{BDA} = \frac{180-60}{2} = \frac{120}{2} = 60°$
$\widehat{BAD} = \widehat{DBA} = \widehat{BDA} = 60°$ donc le triangle ABD est équilatéral.
On en déduit : $AB = AD = BD = \sqrt{4500} = 30\sqrt{5}$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I on a :
$BA^2 = BI^2 + AI^2$
$\sqrt{4500}^2 = (15\sqrt{5})^2 + AI^2$
$4500 = 1125 + AI^2$
$AI^2 = 4500 - 1125 = 3375$
$AI > 0$ donc $AI = \sqrt{3375} = 15\sqrt{15}$

Finalement, en notant $\mathcal{A}$ l'aire totale du terrain on a :
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{BCD} + \mathcal{A}_{ABD} = \frac{CB \times CD}{2} + \frac{BD \times AI}{2} = \frac{30 \times 60}{2} + \frac{\sqrt{4500} \times \sqrt{3375}}{2} = \frac{1800 + 2250\sqrt{3}}{2} \approx 2849 \text{ m}^2$
Ainsi, à un mètre carré près, l'estimation de la superficie du terrain était bonne.