| Nom : <br> Classe : TS5 <br> A préparer pour le : 05 / 11 /18 | **Devoir maison n°2** <br> *Géométrie vectorielle* | Note : <br> … / 10 |
|---|---|---|

| | Avis de l'élève | | Avis du professeur | |
|---|---|---|---|---|
| ***Je sais :*** | ***Oui*** | ***Non*** | ***Oui*** | ***Non*** |
| Déterminer et justifier si des propositions sont vraies ou fausses. | | | | |
| Emettre une conjecture. | | | | |
| Montrer que des vecteurs sont colinéaires. | | | | |
| Justifier que des droites sont sécantes. | | | | |
| Situer le point d'intersection de deux droites. | | | | |
| Donner les coordonnées de différents points dans un repère de l'espace. | | | | |
| Déterminer des représentations paramétriques de droites. | | | | |
| Calculer les coordonnées du point d'intersection de deux droites dans l'espace. | | | | |
| Conclure un problème. | | | | |
| | | | | |

**VRAI ou FAUX ?** Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans l'espace, on donne la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

et les points $A(1\,;1\,;0)$ ; $B(3\,;0\,;-1)$ et $C(7\,;1\,;-2)$.

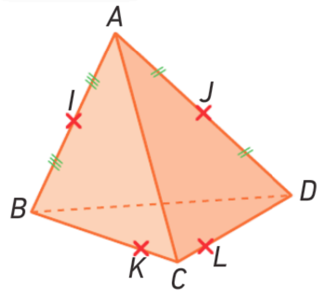
**Proposition 1 :** Une représentation paramétrique de la droite $(AB)$ est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

**Proposition 2 :** Les droites $\mathscr{D}$ et $(AB)$ sont coplanaires.

## 65 Droites concourantes LOGICIEL

$ABCD$ est un tétraèdre de sommet $O$. $I$ est le milieu de $[AB]$, $J$ est le milieu de $[AD]$. $K$ et $L$ sont les points tels que :

$\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.




**Conjecture.** Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie 3D, et émettre une conjecture sur les droites $(AC)$, $(IK)$ et $(JL)$.

**Méthode 1 : Géométrique**

**1.** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires ; en déduire que les points $I$, $J$, $K$ et $L$ sont coplanaires.

**2.** Justifier que les droites $(IK)$ et $(JL)$ sont sécantes.

**3.** Sur quelle arête du tétraèdre se situe l'intersection des deux droites $(IK)$ et $(JL)$ ? Conclure.

**Méthode 2 : Analytique**

**1.** On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Donner les coordonnées des points de la figure.

**2.** En déduire des représentations paramétriques pour les droites $(IK)$ et $(JL)$.

**3.** À l'aide de ces représentations paramétriques, montrer que les droites $(IK)$ et $(JL)$ sont sécantes et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

**4.** Conclure.

# Correction du DM n°2

*Exercice 1* :

**VRAI ou FAUX ?** Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans l'espace, on donne la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$,

et les points $A(1\,;1\,;0)$ ; $B(3\,;0\,;-1)$ et $C(7\,;1\,;-2)$.

**Proposition 1 :** Une représentation paramétrique de la droite $(AB)$ est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

**Proposition 2 :** Les droites $\mathscr{D}$ et $(AB)$ sont coplanaires.

<u>Proposition 1</u> :

On considère la droite (d) : $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = \text{-}1 + t \\ z = \text{-}2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On teste si $\text{A}(1;1;0)$ est un point de (d) :

$$\begin{cases} 1 = 5 - 2t \\ 1 = \text{-}1 + t \\ 0 = \text{-}2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 4 \\ 2 = t \\ 2 = t \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

Donc A est le point de (d) de paramètre $t = 2$. $\text{A} \in$ (d).

On teste si $\text{B}(3;0;\text{-}1)$ est un point de (d) :

$$\begin{cases} 3 = 5 - 2t \\ 0 = \text{-}1 + t \\ \text{-}1 = \text{-}2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 2 \\ 1 = t \\ 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Donc B est le point de (d) de paramètre $t = 1$. $\text{B} \in$ (d).

Finalement : (d) = (AB) et la proposition 1 est vraie.

<u>Proposition 2</u> :

(AB) : $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = \text{-}1 + t \\ z = \text{-}2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathscr{D}$ : $\begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 + t' \\ z = \text{-}5 + 3t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$

On remarque que (AB) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} \text{-}2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que $\mathscr{D}$ est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Or : $\frac{\text{-}2}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{3}$ Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.
Ainsi, ces deux droites ne seront coplanaires que si elles ont un point commun.

Si tel est le cas, le système $\begin{cases} 5 - 2t = 2t' \\ \text{-}1 + t = 1 + t' \\ \text{-}2 + t = \text{-}5 + 3t' \end{cases}$ aura un couple de solutions réelles $(t;t')$ unique.

$$\begin{cases} 5 - 2t = 2t' \\ \text{-}1 + t = 1 + t' \\ \text{-}2 + t = \text{-}5 + 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2t' = 5 \\ t - t' = 2 \\ t - 3t' = \text{-}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - t' = 2 & L_1 \\ 2t + 2t' = 5 & L_2 \\ t - 3t' = \text{-}3 & L_3 \end{cases}$$

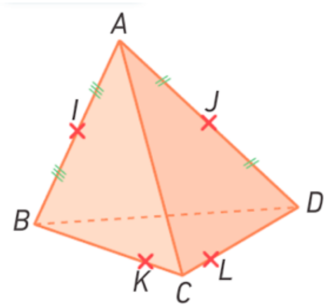
$$\begin{cases} t - t' = 2 & L_1 \\ 2t - 2t + 2t' + 2t' = 5 - 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ t - t - 3t' + t' = \text{-}3 - 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t - t' = 2 \\ 4t' = 1 \\ \text{-}2t' = \text{-}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - t' = 2 \\ t' = \frac{1}{4} \\ t' = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Or : $\frac{1}{4} \neq \frac{5}{2}$ Donc le système n'a pas de solution.
On en déduit que (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes. N'étant pas parallèles, elles ne sont pas coplanaires.
La proposition 2 est fausse.

Exercice 2 : Droites concourantes.

*ABCD* est un tétraèdre de sommet *O*. *I* est le milieu de [*AB*], *J* est le milieu de [*AD*]. *K* et *L* sont les points tels que : $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.




*Conjecture* : A l'aide d'un logiciel, on pourrait conjecturer que les droites (IK), (JL) et (AC) sont concourantes en un point M.

Méthode 1 : Géométrique

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires. En déduire que I, J, K et L sont coplanaires.

Dans le triangle ABD, I et J sont les milieux de [AB] et [AD].
On en déduit, d'après le théorème des milieux, que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.
Dans le triangle BCD, on sait que :

- C, K et B sont alignés dans le même ordre que C, L et D.
- $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ donc $\frac{BK}{BC}=\frac{3}{4}$
- $\overrightarrow{DL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ donc $\frac{DL}{DC}=\frac{3}{4}$

On en déduit que : $\frac{CK}{CB}=\frac{CL}{CD}=\frac{1}{4}$ et qu'ainsi, d'après la réciproque du théorème de Thalès : (KL) // (BD)
(IJ) // (BD) // (KL). Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires. Ainsi, I, J, K et L sont coplanaires.

2. Justifier que les droites (IK) et (JL) sont sécantes.

Les points I, J, K et L sont coplanaires donc les droites (IK) et (JL) aussi.
On en déduit que ces droites sont soit sécantes, soit parallèles.
Raisonnons par l'absurde :
Si les droites (IK) et (JL) étaient parallèles alors, sachant que (IJ) et (KL) le sont aussi, le quadrilatère IJLK serait un parallélogramme. Les côtés opposés [IJ] et [KL] seraient alors de même longueur.
Or, d'après le théorème des milieux appliqué au triangle ABD, on sait que IJ = $\frac{1}{2}$BD.
On aurait alors KL = IJ = $\frac{1}{2}$BD.
Mais d'après le théorème de Thalès, appliqué au triangle BCD on a : $\frac{CK}{CB}=\frac{CL}{CD}=\frac{KL}{BD}$
Ce qui conduirait à : $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ Ce qui est absurde. Ainsi, les droites (IK) et (JL) ne peuvent pas être parallèles.
Sachant qu'elles sont coplanaires, elles sont forcément sécantes en un point M.

3. Sur quelle arête du tétraèdre se situe l'intersection des droites (IK) et (JL) ? Conclure.

Soit M le point d'intersection des droites (IK) et (JL).
M $\in$ (IK) et (IK) $\subset$ (ABC) donc M $\in$ (ABC)
M $\in$ (JL) et (JL) $\subset$ (ADC) donc M $\in$ (ADC)
On en déduit que M $\in$ (ABC) $\cap$ (ADC)
Or (ABC) $\cap$ (ADC) = (AC)
Donc M $\in$ (AC)
Ainsi, les droites (IK), (JL) et (AC) sont concourantes.

Méthode 2 : Analytique

1. On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$. Donner les coordonnées des points de la figure.

Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, on a :
$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(0;1;0)$ $D(0;0;1)$
I étant le milieu de [AB] on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}+0\overrightarrow{AD}$. On en déduit : $I(\frac{1}{2};0;0)$
De même, J étant le milieu de [AD], on a : $J(0;0;\frac{1}{2})$
$\overrightarrow{BK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ donc, d'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
Donc : $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+0\overrightarrow{AD}$. On en déduit : $K(\frac{1}{4};\frac{3}{4};0)$.
De même : $\overrightarrow{DL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ donc : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AL}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{DA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
Donc : $\overrightarrow{AL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{DA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. On en déduit : $L(0;\frac{3}{4};\frac{1}{4})$.

2. En déduire les représentations paramétriques pour les droites (IK) et (JL).

La droite (IK) passe par $I(\frac{1}{2};0;0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{-1}{4}\\ \frac{3}{4}\\ 0\end{pmatrix}$

On en déduit une représentation paramétrique de (IK) : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t \\ y=\frac{3}{4}t \\ z=0 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

La droite (JL) passe par $J(0;0;\frac{1}{2})$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{4}\\ \frac{-1}{4}\end{pmatrix}$

On en déduit une représentation paramétrique de (JL) : $\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{4}t' \\ z=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t' \end{cases}$ avec $t'\in\mathbb{R}$

3. Montrer que les droites (IK) et (JL) sont sécantes et calculer les coordonnées de leur intersection M.

(IK) et (JL) sont sécantes si et seulement si le système $\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}t=0 \\ \frac{3}{4}t=\frac{3}{4}t' \\ 0=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t' \end{cases}$ admet un couple unique de solutions réelles $(t;t')$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}t=0 \\ \frac{3}{4}t=\frac{3}{4}t' \\ 0=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}t=\frac{1}{2} \\ t=t' \\ \frac{1}{4}t'=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{4}{2} \\ t=t' \\ t'=\frac{4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=t' \\ t'=2 \end{cases}$$

Le système a pour unique couple de solutions $(t;t')=(2;2)$.
Donc (IK) et (JL) sont sécantes en un point M. Pour déterminer les coordonnées de M on remplace $t$ par 2 dans la représentation paramétrique de (IK) :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times 2 \\ y=\frac{3}{4}\times 2 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}$$ On en déduit $M(0;\frac{3}{2};0)$.

4. Conclure.

$M(0;\frac{3}{2};0)$ donc $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant colinéaires on en déduit que M appartient à (AC).
Ainsi, les droites (AM), (IK) et (JL) sont concourantes.