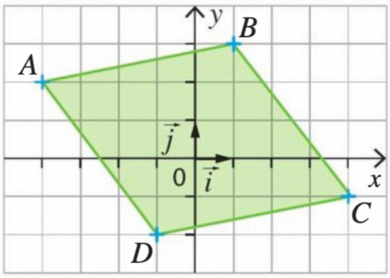
Nom : Classe : 2nde 5	**Devoir maison n°2** Vecteurs et géométrie	à préparer pour le : 24 / 05 / 22

Exercice 24 p 242 :

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-4\ ;\ 2)$, $B(1\ ;\ 3)$, $C(4\ ;\ -1)$ et $D(-1\ ;\ -2)$.



1. Montrer que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

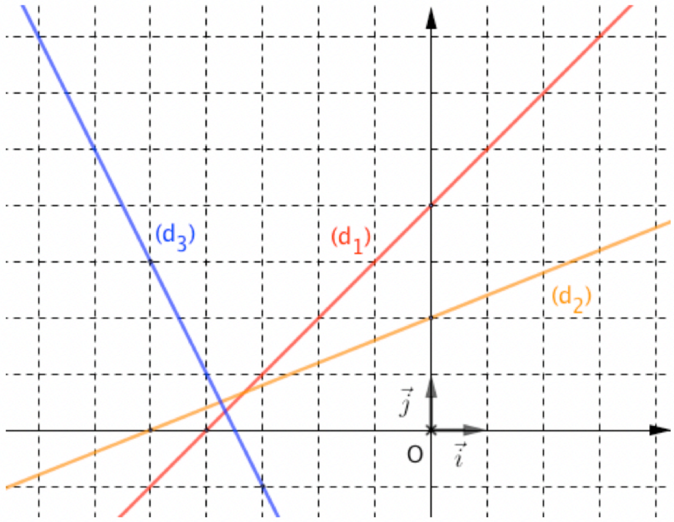
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

3. Calculer l'aire de ce quadrilatère.

4. En déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice 6 du cours :

Déterminer une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.



Exercice 26 p 242 :

Dans un repère orthonormé, on donne $A\ (-2\ ;\ 4)$, $B\ (3\ ;\ 0)$ et $C\ (-5\ ;\ 0)$.

Soient D et E les points tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$.

1. Calculer les coordonnées des points D et E.

2. a. Montrer que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BC}$.

b. Que peut-on en déduire pour les droites (BC) et (DE) ?

Exercice 8 du cours :

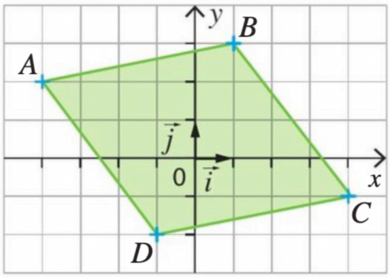
1. Les droites $d : 2x - 3y + 4 = 0$ et $d' : -1,2x + 1,5y + 3 = 0$ sont elles parallèles ? Justifier.
2. Déterminer la droite d'' parallèle à d qui passe par A $(3\ ;\ 4)$.

Résolution d'un système : Savoir résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues, parmi ceux traités en classe (partie IV du cours).

Correction du DM n°2

Exercice 24 p 242 :

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-4\,;2)$, $B(1\,;3)$, $C(4\,;-1)$ et $D(-1\,;-2)$.



1. Montrer que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
3. Calculer l'aire de ce quadrilatère.
4. En déduire l'aire du triangle ABC.

1. Soit I le milieu de [AC]. On a :
   $x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x\mathrm{A} + x\mathrm{C}}{2} = \dfrac{-4+4}{2} = 0$
   $y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y\mathrm{A} + y\mathrm{C}}{2} = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$
   Soit J le milieu de [BD]. On a :
   $x_{\mathrm{J}} = \dfrac{x\mathrm{B} + x\mathrm{D}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$
   $y_{\mathrm{J}} = \dfrac{y\mathrm{B} + y\mathrm{D}}{2} = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2}$
   I et J ont les mêmes coordonnées donc [AC] et [BD] ont le même milieu.
2. Dans le quadrilatère ABCD, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.
   Or, un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
   Donc ABCD est un parallélogramme.
3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 1+4 \\ 3-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{D}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{D}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix} -1+4 \\ -2-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
   On en déduit :
   $\mathcal{A}_{\mathrm{ABCD}} = |\,det\,(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}})|$
   $\mathcal{A}_{\mathrm{ABCD}} = \left|\begin{matrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{matrix}\right|$
   $\mathcal{A}_{\mathrm{ABCD}} = |\,5 \times (-4) - 1 \times 3\,| = |-20 - 3|$
   $\mathcal{A}_{\mathrm{ABCD}} = |-23| = 23$
4. Le parallélogramme ABCD est constitué de deux triangles identiques : ABC et ACD.
   On en déduit : $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ABCD}} \div 2 = 11{,}5$

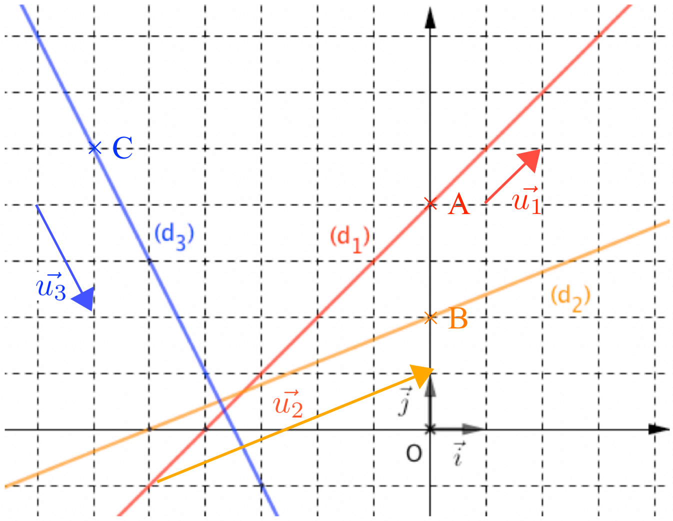
Exercice 26 p 242 :

Dans un repère orthonormé, on donne $A\,(-2\,;4)$, $B\,(3\,;0)$ et $C\,(-5\,;0)$.
Soient D et E les points tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$.
1. Calculer les coordonnées des points D et E.
2. a. Montrer que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BC}$.
b. Que peut-on en déduire pour les droites (BC) et (DE) ?

1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{D}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{D}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{D}} + 2 \\ y_{\mathrm{D}} - 4 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 3+2 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{D}} + 2 = 2 \times 5 \\ y_{\mathrm{D}} - 4 = 2 \times (-4) \end{cases}$
   $\begin{cases} x_{\mathrm{D}} = 10 - 2 \\ y_{\mathrm{D}} = -8 + 4 \end{cases}$
   $\begin{cases} x_{\mathrm{D}} = 8 \\ y_{\mathrm{D}} = -4 \end{cases}$
   $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} + 2 \\ y_{\mathrm{E}} - 4 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} -5+2 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{E}} + 2 = 2 \times (-3) \\ y_{\mathrm{E}} - 4 = 2 \times (-4) \end{cases}$
   $\begin{cases} x_{\mathrm{E}} = -6 - 2 \\ y_{\mathrm{E}} = -8 + 4 \end{cases}$
   $\begin{cases} x_{\mathrm{E}} = -8 \\ y_{\mathrm{E}} = -4 \end{cases}$
2. a)
   $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{D}} \\ y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix} -8-8 \\ -4+4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix} -16 \\ 0 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}} \\ y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} -5-3 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$
   On constate que $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

   b) On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont colinéaires. Ce qui implique que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Exercice 6 du cours :
Déterminer une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.



La droite (d_1) passe par A $(0\,;\,4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

M $(x\,;\,y) \in (d_1)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}_1$ sont colinéaires

$$det\,(\overrightarrow{AM}\,;\,\vec{u}_1) = 0$$
$$\begin{vmatrix} x-0 & 1 \\ y-4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$1(x-0) - 1(y-4) = 0$$
$$x - 0 - y + 4 = 0$$
$$x - y + 4 = 0$$

La droite (d_2) passe par B $(0\,;\,2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

M $(x\,;\,y) \in (d_2)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires

$$det\,(\overrightarrow{BM}\,;\,\vec{u}_2) = 0$$
$$\begin{vmatrix} x-0 & 5 \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$2(x-0) - 5(y-2) = 0$$
$$2x - 0 - 5y + 10 = 0$$
$$2x - 5y + 10 = 0$$

La droite (d_3) passe par C $(\text{-}6\,;\,5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u_3}\begin{pmatrix} 1 \\ \text{-}2 \end{pmatrix}$.

M $(x\,;\,y) \in (d_3)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{u}_3$ sont colinéaires

$$det\,(\overrightarrow{CM}\,;\,\vec{u}_3) = 0$$
$$\begin{vmatrix} x+6 & 1 \\ y-5 & \text{-}2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\text{-}2(x+6) - 1(y-5) = 0$$
$$\text{-}2x - 12 - y + 5 = 0$$
$$\text{-}2x - y - 7 = 0$$

Exercice 8 du cours :

1. Les droites $d : 2x - 3y + 4 = 0$ et $d' : \text{-}1,2x + 1,5y + 3 = 0$ sont elles parallèles ? Justifier.

La droite d a pour vecteur directeur :
$\vec{u}\begin{pmatrix} \text{-}b \\ a \end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
La droite d' a pour vecteur directeur :
$\vec{v}\begin{pmatrix} \text{-}b' \\ a' \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} \text{-}1,5 \\ \text{-}1,2 \end{pmatrix}$
$det\,(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 3 \times (\text{-}1,2) + 1,5 \times 2$
$det\,(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \text{-}3,6 + 3 = \text{-}0,6 \neq 0$
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que d et d' ne sont pas parallèles.

2. Déterminer la droite d'' parallèle à d qui passe par A $(3\,;\,4)$.

Si d'' est parallèle à d alors tout vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre.
On en déduit que $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d''.
De plus d'' passe par A $(3\,;\,4)$.
Ainsi, M $(x\,;\,y) \in (d'')$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$det\,(\overrightarrow{AM}\,;\,\vec{u}_1) = 0$$
$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$2(x-3) - 3(y-4) = 0$$
$$2x - 6 - 3y + 12 = 0$$
$$2x - 3y + 6 = 0$$

Résolution d'un système :
Cf Exemple #5 BIS et Exercice 9 du cours