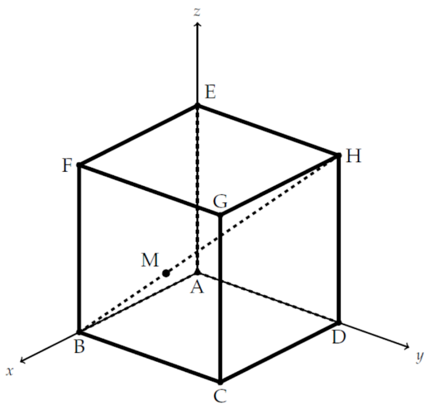
Nom : Groupe : TMATHS1	**DM n°3**	A préparer pour le : jeudi 23 / 02 / 23

Exercice 1

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2.

a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

4.

a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1 ; 1 ; 1)$ est normal au plan (EGD).

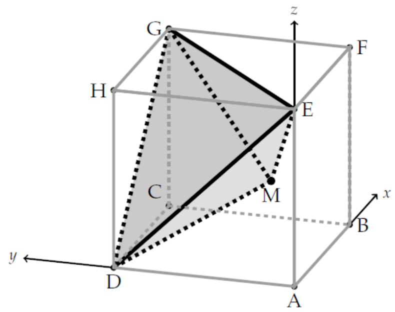
b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

c. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{b \times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1.
a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.
b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}55^n$.

b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil():
    n=0
    P=0
    while P<0.99:
        n=n+1
        P=1-0.55**n
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 3 :

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$, par

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1++e^x)^2}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et que $g'(0) = 0$.
   Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbf{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur $\mathbf{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.
Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,3\right)$.

1. Démontrer que le point B(0 ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$.
2. Soit x un réel quelconque.
   On note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.
   Démontrer que $AM^2 = g(x)$.
3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
   Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
   Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.
5. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).

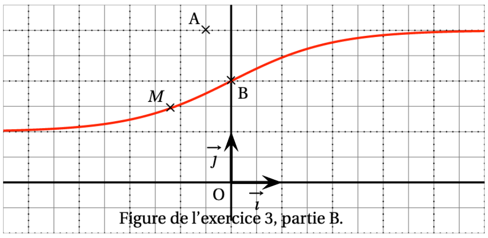


Figure de l'exercice 3, partie B.

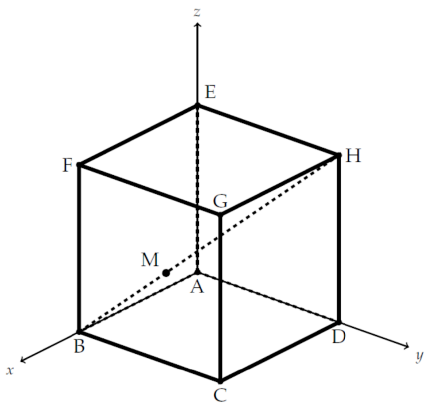
Nom : Groupe : TMATHS1	**Test du DM n°3**	Le 23 / 02 / 23 Note : … / 20

Exercice 1

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

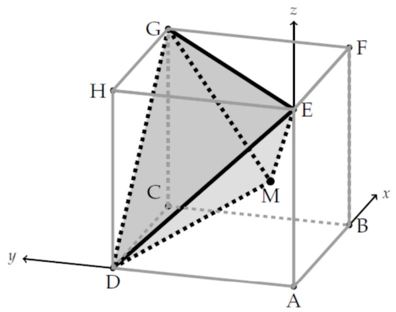
On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2.
   a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.
4.
   a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\,;1\,;1)$ est normal au plan (EGD).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.
5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1.

a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Montrer que $p_n=1-0{,}55^n$.

b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil():
    n=0
    P=0
    while P<0.99:
        n=n+1
        P=1-0.55**n
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 3

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$, par

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1 + +\mathrm{e}^x)^2}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. **Déterminer la limite de g en -∞. (On admet que g diverge vers + ∞ en +∞)**
2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et que $g'(0) = 0$.
   Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbf{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur $\mathbf{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.
Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\, 3\right)$.

1. Démontrer que le point B(0 ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$.
2. Soit x un réel quelconque.
   On note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x\,;\, f(x))$.
   ~~Démontrer que~~ $\mathrm{A}M^2 = g(x)$. **(Ce résultat est admis. Ne pas traiter cette question)**
3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si $\mathrm{A}M^2$ est minimal.
   Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
   Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.
5. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).

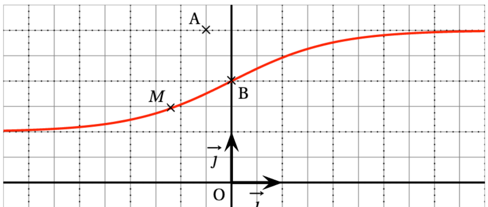


Figure de l'exercice 3, partie B.

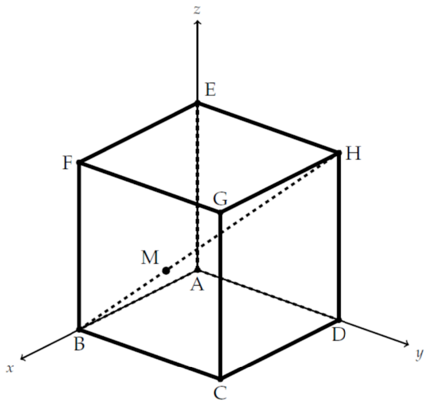
Correction du DM n°3

Exercice 1

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



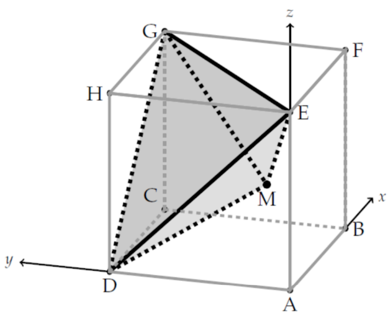
1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2.
   a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

   b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

   Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.
4.
   a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\,;1\,;1)$ est normal au plan (EGD).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V=\frac{b\times h}{3}$ *où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.*

---

1. Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) on a :
B (1 ; 0 ; 0), D (0 ; 1 ; 0), E (0 ; 0 ; 1)
G (1 ; 1 ; 1) et H (0 ; 1 ; 1)

2. a) Les carrés EFGH, EADH et CDHG sont de même taille. Leurs arêtes sont de longueur 1.
On en déduit que leurs diagonales sont de même longueur : $\sqrt{2}$.
Ainsi, EG = ED = GD = $\sqrt{2}$
Ce qui prouve que EGD est équilatéral.

   b) L'aire du triangle EGD est :
$\mathscr{A}=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ avec $c=\sqrt{2}$
$$\mathscr{A}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{2}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. M est définie par $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$ avec :
$$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H-x_B\\ y_H-y_B\\ z_H-z_B\end{pmatrix}\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 0-1\\ 1-0\\ 1-0\end{pmatrix}\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$
On en déduit :
$$\begin{cases} x_M-x_B=\frac{1}{3}\times(-1)\\ y_M-y_B=\frac{1}{3}\times 1\\ z_M-z_B=\frac{1}{3}\times 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_M-1=\frac{-1}{3}\\ y_M-0=\frac{1}{3}\\ z_M-0=\frac{1}{3}\end{cases}$$
$$\begin{cases} x_M=\frac{-1}{3}+1=\frac{2}{3}\\ y_M=\frac{1}{3}\\ z_M=\frac{1}{3}\end{cases}$$
Ainsi, on a M ($\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$)

4. a) $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 1-0\\ 1-0\\ 1-1\end{pmatrix}\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 0-0\\ 1-0\\ 0-1\end{pmatrix}\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$
$$\frac{x_{\overrightarrow{ED}}}{x_{\overrightarrow{EG}}}=\frac{0}{1}=0\quad\text{mais}\ \frac{y_{\overrightarrow{ED}}}{y_{\overrightarrow{EG}}}=\frac{1}{1}=1\neq 0$$
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{ED}$, non colinéaires, dirigent le plan (EGD).
$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{EG}=-1\times 1+1\times 1+1\times 0=-1+1=0$
et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{ED}=-1\times 0+1\times 1+1\times(-1)=0$
Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (EGD)

   b) Le plan (EGD) passe par E (0 ; 0 ; 1) et a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. Donc N (x ; y ; z) appartient à (EGD) si et seulement si :
$$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{EN}=0$$
$$-1\times(x-0)+1\times(y-0)+1\times(z-1)=0$$
$$-x+y+z-1=0$$

5. a) K est le pied de la hauteur issue de M, dans la pyramide GEDM. Donc K est le point d'intersection du plan (EGD) avec la droite Δ perpendiculaire à (EGD) qui passe par M ($\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$). Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est normal à (EGD), dirige Δ. On en déduit une représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - t \\ y = \dfrac{1}{3} + t \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = \dfrac{1}{3} + t \end{cases}$$

On rappelle que $-x + y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (EGD).

Ainsi, K (x ; y ; z) = $\Delta \cap$ (EGD) $\Leftrightarrow$ $-(\frac{2}{3} - t) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0$

$$-\frac{2}{3} + t + \frac{2}{3} + 2t - 1 = 0$$

$$3t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

K est donc le point de Δ qui a pour paramètre $t = \frac{1}{3}$. On en déduit : $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$

Ainsi, on a K ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$)

b) Le volume de la pyramide GEDM est $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h$

où $\mathscr{B} = \mathscr{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est l'aire du triangle EGD et h est la hauteur de la pyramide.

K étant le pied de la hauteur issue de M on en déduit $h = \text{KM}$ avec $\overrightarrow{\text{KM}}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} \overrightarrow{\text{KM}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Ainsi $h = \text{KM} = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{-1}{3})^2 + (\frac{-1}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \times 3} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1.
a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.
b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

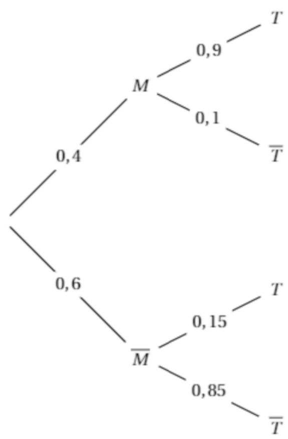
a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}55^n$.

b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil():
    n=0
    P=0
    while P<0.99:
        n=n+1
        P=1-0.55**n
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

1. a)



b) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$
$P(M \cap T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$
La probabilité que le chat pris au hasard soit porteur de la maladie et que son test soit positif vaut $0,36$.

c) $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$
$P(T) = 0,36 + 0,6 \times 0,15$
$P(T) = 0,36 + 0,09 = 0,45$
La probabilité que le test d'un chat pris au hasard soit positif vaut $0,45$.

d) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{4}{5} = 0,8$
La probabilité de choisir au hasard un chat porteur de la maladie, parmi ceux dont le test s'avère positif, est égale à $0,8$.

2. a) Choisir un chat au hasard dans le centre vétérinaire et effectuer un test de dépistage est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que deux issues possibles :
   - T : « Le test est positif »
   - ou $\bar{T}$: « Le test est négatif ».

   On répète cette même épreuve 20 fois, dans des conditions d'indépendance puisque on peut assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise. On obtient un schéma de Bernoulli dans lequel on note $n = 20$ le nombre de chats testés et $p = P(T) = 0,45$ la probabilité que chaque chat testé soit positif.
   Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi. X ne peut prendre que des valeurs entières, comprises entre 0 et 20. On en déduit que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(\,20\,;\;0,45\,)$.

   b) $P(X = 5) = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,036$
   La probabilité qu'il y ait exactement 5 chats présentant un test positif vaut environ $0,036$.

   c) $P(X \leq 8) \approx 0,414$
   La probabilité qu'il y ait au plus 8 chats présentant un test positif vaut environ $0,414$.

   d) $E(X) = n\,p = 20 \times 0,45 = 9$
   On en déduit que lorsqu'on réitère un très grand nombre de fois et dans les mêmes conditions ce test de 20 chats pris au hasard dans ce centre vétérinaire on peut estimer que le nombre de chats présentant un test positif est en moyenne égal à 9.

3. a) On choisit un échantillon de n chats, dans les mêmes conditions d'indépendance que celles décrites précédemment. On admet que la variable aléatoire X qui donne le nombre de chats dont le test s'avère positif suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,45)$. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat dont le test s'avère positif.

Ainsi : $p_n = P(X \geq 1)$

$$p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0,45^0 \times 0,55^n$$

$$p_n = 1 - \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0,45^0 \times 0,55^n$$

$$p_n = 1 - 1 \times 1 \times 0,55^n$$

$$p_n = 1 - 0,55^n$$

b) Le programme Python permet de déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n à partir duquel p_n est supérieur ou égal à $0,99$.

c) On peut déterminer la valeur renvoyée par le programme Python :

- en tapant >>>seuil() dans la console Python ;
- ou bien en observant la table des valeurs de p_n dans le menu SUITES (ou RECUR) de la calculatrice ;
- ou enfin en résolvant $p_n \geq 0,99$ algébriquement :

$$1 - 0,55^n \geq 0,99 \;\Leftrightarrow\; 1 - 0,99 \geq 0,55^n \;\Leftrightarrow\; 0,55^n \leq 0,01 \;\Leftrightarrow\; ln(0,55^n) \leq ln(0,01)$$

$$1 - 0,55^n \geq 0,99 \;\Leftrightarrow\; n\,ln(0,55) \leq ln(0,01)$$

$0 < 0,55 < 1$ donc $ln(0,55) < 0$. On en déduit : $1 - 0,55^n \geq 0,99 \;\Leftrightarrow\; n \geq \dfrac{ln(0,01)}{ln(0,55)}$

Or $\dfrac{ln(0,01)}{ln(0,55)} \approx 7,7$ et $n \in \mathbb{N}$ donc $p_n \geq 0,99 \;\Leftrightarrow\; n \geq 8$

Ainsi, il faut tester au hasard au moins 8 chats pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice 3

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$, par

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1++e^x)^2}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et que $g'(0) = 0$.
   Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbf{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur $\mathbf{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,3\right)$.

1. Démontrer que le point B(0 ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$.
2. Soit x un réel quelconque.
   On note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.
   Démontrer que $AM^2 = g(x)$.
3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
   Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
   Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.
5. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).

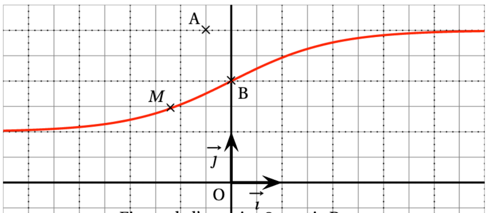


Figure de l'exercice 3, partie B.

Partie A

1. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2}$

   La limite en l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré donc :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

   De même :

   $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

   De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

   On en déduit, par somme :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^x = 1$

   Puis, par produit :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+e^x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (1+e^x)^2 = 1$

   Puis, par quotient :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{(1+e^x)^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{(1+e^x)^2} = 4$

   Enfin, par somme :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

2. On admet que g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) = 0$ on en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

3. $g(0) = 0^2 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+1)^2}$

   $g(0) = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$

   On en déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$\frac{5}{4}$	↗	$+\infty$

   Ainsi, le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est $g(0) = \frac{5}{4}$.

Partie B

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3 - \dfrac{2}{1+e^x}$

   $f(0) = 3 - \dfrac{2}{1+e^0} = 3 - \dfrac{2}{1+1} = 3 - \dfrac{2}{2} = 3 - 1 = 2$. Ce qui prouve que B (0 ; 2) $\in \mathscr{C}f$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note M (x ; $f(x)$) $\in \mathscr{C}f$. De plus, on donne A ($\dfrac{-1}{2}$; 3).

   On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x + \dfrac{1}{2} \\ f(x) - 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x + \dfrac{1}{2} \\ 3 - \dfrac{2}{1+e^x} - 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-2}{1+e^x} \end{pmatrix}$

   Ainsi, $\mathrm{AM}^2 = ||\overrightarrow{\mathrm{AM}}||^2 = \sqrt{(x+\dfrac{1}{2})^2 + (\dfrac{-2}{1+e^x})^2}^{\,2}$

   $\mathrm{AM}^2 = (x+\dfrac{1}{2})^2 + (\dfrac{-2}{1+e^x})^2$

   $\mathrm{AM}^2 = x^2 + 2 \times x \times \dfrac{1}{2} + (\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{(-2)^2}{(1+e^x)^2}$

   $\mathrm{AM}^2 = x^2 + x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{(1+e^x)^2} = g(x)$

3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
   Or, $\forall x \in \mathbb{R}$ et M (x ; $f(x)$) $\in \mathscr{C}f$ on a $\mathrm{AM}^2 = g(x)$
   Donc AM est minimale lorsque la fonction g atteint son minimum.
   On a montré dans la partie A que le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est $g(0) = \dfrac{5}{4}$.
   Donc AM est minimale si et seulement si $x = 0$ et M (0 ; $f(0)$).
   De plus, on a prouvé dans la partie B que $f(0) = 2$ et que, par conséquent B (0 ; 2) $\in \mathscr{C}f$.
   Ainsi, AM est minimale si et seulement M = B.

4. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3 - \dfrac{2}{1+e^x} = 3 - 2 \times \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + e^x$

   Donc $f'(x) = -2 \times \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2} = -2 \times \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{2\,e^x}{(1+e^x)^2}$

   b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}f$ en B (0 ; 2).
   On sait que $f(0) = 2$
   De plus : $f'(0) = \dfrac{2\,e^0}{(1+e^0)^2} = \dfrac{2}{(1+1)^2} = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

   Ainsi, T a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

   $$y = \frac{1}{2}\,x + 2$$

5. T a pour équation $y = \dfrac{1}{2}\,x + 2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2}x - y + 2 = 0$

   On rappelle que toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ est l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

   Ainsi, la tangente T est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   La droite (AB), quant à elle, est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 0 + \dfrac{1}{2} \\ 2 - 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\vec{u} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times (-1) = 0$

   Donc T est perpendiculaire à (AB).