Nom : *Classe* : 2nde 2 / 2nde 5 *A préparer pour le* : 04 / 04 / 19	**Devoir maison n°4** Raisonnement par l'absurde et irrationalité de $\sqrt{2}$	*Note* : … / 10

	Evaluation de la capacité
Je sais :	Non Oui
Raisonner	$\longrightarrow$

L'objectif de ce devoir maison est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
Pour cela, les définitions et propriétés d'arithmétique suivantes seront nécessaires.

Définition : Le PGCD de deux nombres est leur Plus Grand Commun Diviseur.

Propriétés :

- Deux entiers naturels p et q sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1. Dans ce cas, on note : $\text{PGCD}(p\ ;q) = 1$.
- La fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible si les entiers p et q sont premiers entre eux.

Définitions :

- Un nombre n est pair s'il existe un entier k tel que $n = 2k$.
- Un nombre n est impair s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

1. *Démonstration préliminaire* : Compléter la démonstration suivante.
   Soit n un nombre entier impair. Alors, il existe un entier … tel que …………
   $n^2 = (\ldots\ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2\,(\ldots\ldots\ldots) + 1$
   On en déduit la propriété suivante :

Propriété : Le carré d'un nombre impair est toujours un nombre …………

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel nous allons effectuer ce que l'on appelle un raisonnement par l'absurde.
Cela consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut prouver pour démontrer que cela impliquerait une absurdité. Ainsi, pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, nous allons supposer le contraire :

Hypothèse de départ : Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel.

Alors, il existerait deux entiers p et q (avec $q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et $\text{PGCD}(p\ ;q) = 1$.

2. a) Démontrer que $p^2 = 2q^2$.
   b) Que peut-on en déduire sur p^2 ?
   c) Expliquer pourquoi le fait de supposer que p est un nombre impair conduit à une absurdité.
   Que peut-on alors en conclure sur p.
3. On rappelle que $p^2 = 2q^2$. p étant un nombre pair, il existe un entier k' tel que $p = 2k'$.
   a) Démontre que $q^2 = 2\,k'^2$.
   b) Que peut-on en déduire sur q^2 puis sur q ?
4. En quoi aboutit-on à une absurdité ? Conclure.

Nom : Classe : 2nde 2 / 2nde 5 Le : 08 / 04 / 19	**Test du DM n°4** Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$	Note : … / 10

	Evaluation de la capacité	
Je sais :	Non	Oui
Raisonner		

L'objectif de ce devoir maison est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
Pour cela, les définitions et propriétés d'arithmétique suivantes seront nécessaires.

Définition : Le PGCD de deux nombres est leur Plus Grand Commun Diviseur.

Propriétés :

- Deux entiers naturels p et q sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1. Dans ce cas, on note : $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$.
- La fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible si les entiers p et q sont premiers entre eux.

Définitions :

- Un nombre n est pair s'il existe un entier k tel que $n = 2k$.
- Un nombre n est impair s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

1. *Démonstration préliminaire* : Compléter la démonstration suivante.
   Soit n un nombre entier impair. Alors, il existe un entier … tel que …………
   $n^2 = (\ldots\ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2\,(\ldots\ldots\ldots) + 1$
   On en déduit la propriété suivante :

Propriété : Le carré d'un nombre impair est toujours un nombre …………

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel nous allons effectuer ce que l'on appelle un raisonnement par l'absurde. Cela consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut prouver pour démontrer que cela impliquerait une absurdité. Ainsi, pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, nous allons supposer le contraire :

Hypothèse de départ : Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel.

Alors, il existerait deux entiers p et q (avec $q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$.

2. a) Démontrer que $p^2 = 2q^2$.

………
………
………
………
………

b) Que peut-on en déduire sur p^2 ?

………

c) Expliquer pourquoi le fait de supposer que p est un nombre impair conduit à une absurdité.
Que peut-on alors en conclure sur p.

………
………
………
………
………
………

3. On rappelle que $p^2 = 2q^2$. p étant un nombre pair, il existe un entier k' tel que $p = 2k'$.

a) Démontre que $q^2 = 2\,k'^2$.

....
....
....
....
....
....

b) Que peut-on en déduire sur q^2 puis sur q ?

On en déduit que q^2 est un nombre pair.
Si q était un nombre impair alors son carré serait un nombre impair.
Or, q^2 est un nombre pair. On en déduit que q ne peut pas être impair. Ainsi, q est lui aussi un nombre pair.

4. En quoi aboutit-on à une absurdité ? Conclure.

....
....
....
....
....
....
....

Correction du DM n°4

L'objectif de ce devoir maison est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Définition : Le PGCD de deux nombres est leur Plus Grand Commun Diviseur.
Propriétés :

- Deux entiers naturels p et q sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1. Dans ce cas, on note : $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$.
- La fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible si les entiers p et q sont premiers entre eux.

Définitions :

- Un nombre n est pair s'il existe un entier k tel que $n = 2k$.
- Un nombre n est impair s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

1. *Démonstration préliminaire* : Compléter la démonstration suivante.
   Soit n un nombre entier impair. Alors, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.
   $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\,(2k^2 + 2k) + 1$
   On en déduit la propriété suivante :

Propriété : Le carré d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel nous allons effectuer ce que l'on appelle un raisonnement par l'absurde. Cela consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut prouver pour démontrer que cela impliquerait une absurdité. Ainsi, pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, nous allons supposer le contraire :

Hypothèse de départ : Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel.
Alors, il existerait deux entiers p et q (avec $q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$.

2. a) Démontrer que $p^2 = 2q^2$.

En supposant que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ on en déduit que : $p = \sqrt{2} \times q$
Ainsi, en élevant chaque membre de l'égalité au carré on a : $p^2 = 2\,q^2$.

b) Que peut-on en déduire sur p^2 ?

On sait que $p^2 = 2\,q^2$ et que q^2 est un entier naturel (car q est lui même, un entier naturel).
On en déduit que p^2 est un nombre pair.

c) Expliquer pourquoi le fait de supposer que p est un nombre impair conduit à une absurdité.
Que peut-on alors en conclure sur p.

Supposons que p soit un nombre impair. Alors, d'après la démonstration préliminaire, son carré serait lui aussi un nombre impair. Ceci serait absurde car p^2 est un nombre pair. Ainsi, p est forcément un nombre pair.

3. On rappelle que $p^2 = 2q^2$. p étant un nombre pair, il existe un entier k' tel que $p = 2k'$.
   a) Démontre que $q^2 = 2\,k'^2$.

On sait que $p^2 = 2q^2$ et que, p étant un nombre pair, il existe un entier k' tel que $p = 2k'$.
On en déduit successivement : $(2k')^2 = 2q^2$ puis : $4\,k'^2 = 2q^2$ puis : $2k'^2 = q^2$ Autrement dit : $q^2 = 2\,k'^2$

b) Que peut-on en déduire sur q^2 puis sur q ?

Puisque $q^2 = 2\,k'^2$ alors q^2 est un nombre pair.
Si q était un nombre impair alors son carré serait un nombre impair. Donc q est forcément un nombre pair.

4. En quoi aboutit-on à une absurdité ? Conclure.

Dans l'hypothèse de départ on a supposé qu'il existait deux entiers p et q (avec $q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$. Or, nous venons de démontrer que si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ alors, nécessairement, les entiers p et q sont pairs. Ce qui signifie qu'ils sont divisibles par 2. Ceci est absurde car leur PGCD est égal à 1.
En conclusion, il ne peut exister deux entiers p et q (avec $q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$.
Ainsi, le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.