

<u>Nom</u> :	<b>Devoir maison n°1</b>	<u>Note</u> :
<u>Classe</u> : T ES	<i>Suites arithmético-géométrique</i>	
<u>A rendre pour le</u> : 14 / 11 /16		

<i>Je sais :</i>	<i>Avis de l'élève</i>		<i>Avis du professeur</i>	
	<i>Oui</i>	<i>Non</i>	<i>Oui</i>	<i>Non</i>
Comprendre / Appliquer pas à pas un algorithme. Donne et interpréter le résultat affiché.				
Justifier la formule qui permet de modéliser une situation à l'aide d'une suite.				
Calculer les premiers termes d'une suite.				
Justifier qu'une suite est géométrique en précisant son 1 <sup>er</sup> terme et sa raison.				
Justifier la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique.				
Déterminer le sens de variations d'une suite.				
Déterminer la limite d'une suite.				
Répondre à un problème concret en justifiant sa réponse.				

Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile des repas à des personnes dépendantes. En 2015, 600 personnes étaient abonnées à ce service. Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle son nombre d'abonnés évolue de la façon suivante :

- Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés .
- Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnements à ce service.

1. Pour suivre l'évolution du nombre d'abonnés, un gestionnaire réalise l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	$N$ et $U$ sont des nombres
<b>Traitement :</b>	Affecter à $N$ la valeur 0 Affecter à $U$ la valeur 600 Tant que $U < 800$ faire $N$ prend la valeur $N + 1$ $U$ prend la valeur $U - U \times 0,05 + 80$ Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $N$

a) Recopier puis compléter le tableau ci-dessous, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire. Arrondir les valeurs calculées à l'unité.

Valeur de $N$	0		
Valeur de $U$	600		
Test $U < 800$	Vrai		

- b) Déterminer la valeur affichée en fin d'exécution de l'algorithme.
- c) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. a) Justifier que la suite  $(u_n)$ , définie pour tout entier naturel  $n$  par :
- $$u_0 = 600 \text{ et } u_{n+1} = 0,95u_n + 80$$
- permet de suivre l'évolution du nombre d'abonnés à l'association depuis 2015, d'une année à l'autre.
- b) Donner  $u_1$  et  $u_2$  (arrondir les valeurs à l'unité).
- c) On introduit la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $v_n = u_n - 1600$ .  
Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme de cette suite.
- d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = 1600 - 1000 \times 0,95^n$ .
- e) Déterminer le sens de variations et la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. La taille des locaux ne permet pas de servir plus de 1000 repas. Si cette évolution se poursuit au même rythme, l'association devra-t-elle envisager un jour des travaux d'agrandissement ? Justifier.





## Correction du DM n°1

Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile des repas à des personnes dépendantes. En 2015, 600 personnes étaient abonnées à ce service. Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle son nombre d'abonnés évolue de la façon suivante :

- Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés .
- Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnements à ce service.

1. Pour suivre l'évolution du nombre d'abonnés, un gestionnaire réalise l'algorithme suivant :

<b>Variabes :</b>	$N$ et $U$ sont des nombres
<b>Traitement :</b>	Affecter à $N$ la valeur 0 Affecter à $U$ la valeur 600 Tant que $U < 800$ faire $N$ prend la valeur $N + 1$ $U$ prend la valeur $U - U \times 0,05 + 80$ Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $N$

a) Recopier puis compléter le tableau ci-dessous, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire. Arrondir les valeurs calculées à l'unité.

Valeur de $N$	0	1	2	3	4	5
Valeur de $U$	600	650	698	743	785	826
Test $U < 800$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

b) La valeur affichée en fin d'exécution de l'algorithme est  $N = 5$ .

c) Cela signifie qu'au bout de 5 ans l'association comptera plus de 800 abonnés.

2. a) En notant  $u_n$  le nombre d'abonnés à l'association en l'an 2015 +  $n$ ,  $u_0$  correspond au nombre d'abonnés en 2015, soit 600. D'une année à l'autre, 5% des abonnements ne sont pas renouvelés mais on enregistre 80 nouveaux abonnements. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100}u_n + 80 = (1 - 0,05)u_n + 80 = 0,95u_n + 80$$

b)  $u_1 = 0,95u_0 + 80 = 0,95 \times 600 + 80 = 650$

L'association comptabilisera 650 abonnés en 2016.

$$u_2 = 0,95u_1 + 80 = 0,95 \times 650 + 80 \approx 698$$

L'association comptabilisera 698 abonnés en 2017.

c)  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1600$

$$\text{Donc : } v_{n+1} = u_{n+1} - 1600 = 0,95u_n + 80 - 1600 = 0,95u_n - 1520$$

$$\text{Or, puisque : } v_n = u_n - 1600 \text{ alors : } u_n = v_n + 1600$$

$$\text{On en déduit : } v_{n+1} = 0,95(v_n + 1600) - 1520 = 0,95v_n + 1520 - 1520 = 0,95v_n$$

$$\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,95v_n$$

On en déduit que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,95.

$$\text{Calcul de son 1}^{\text{er}} \text{ terme : } v_0 = u_0 - 1600 = 600 - 1600 = -1000$$

d) La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,95$  et de 1<sup>er</sup> terme  $v_0 = -1000$ .

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = -1000 \times 0,95^n$$

$$\text{On en déduit : } u_n = v_n + 1600 = 1600 - 1000 \times 0,95^n.$$

e) Etude du sens de variations de la suite  $(u_n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 1600 - 1000 \times 0,95^{n+1} - 1600 + 1000 \times 0,95^n$$

$$u_{n+1} - u_n = -1000 \times 0,95 \times 0,95^n + 1000 \times 0,95^n$$

$$u_{n+1} - u_n = -950 \times 0,95^n + 1000 \times 0,95^n$$

$$u_{n+1} - u_n = (-950 + 1000) \times 0,95^n = 50 \times 0,95^n > 0$$

$$u_{n+1} > u_n$$

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante sur  $\mathbb{N}$ .

Etude de la limite de la suite  $(u_n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1600 - 1000 \times 0,95^n$$

$$0,95 \in ]0 ; 1[ \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1000 \times 0,95^n) = 1000 \times 0 = 0$$

$$\text{Puis : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1600 - 1000 \times 0,95^n) = 1600 - 0 = 1600$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1600$$

3. On vient de démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que sa limite vaut 1600. On en déduit que le nombre d'abonnés à l'association ne cessera d'augmenter et tendra dans un très grand nombre d'années vers 1600. Or, la taille actuelle des locaux ne permet pas à l'association de servir plus de 1000 repas. L'association devra donc un jour envisager des travaux d'agrandissement.