Nom :……………………………………. **DS n°1** **T.S.**

Prénom : ……………………………… **le 23.09.2019**

Capacités évaluées :	***Avis du professeur*** — ***Non acquis***	***En cours d'acquisition***	***Acquis***
Démontrer par récurrence			
Déterminer le sens de variations d'une suite			
Déterminer des limites/lever des formes indéterminées			
Justifier une formule de récurrence dans un contexte donné			
Compléter un algorithme			
Interpréter des résultats dans un contexte donné			
Démontrer qu'une suite est géométrique			
Conjecturer la limite d'une suite à l'aide de la calculatrice			

Barème :

Ex 1	**Ex 2**	**Ex 3**	**Ex 4**	**Ex 5**	**TOTAL**
/ 3	/ 2	/ 2	/ 5	/ 8	/ 20

Exercice 1 : E.C. **….. / 3 points**

Soit la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$
   Que peut-on en conclure ?

Exercice 2 :E.C. **….. / 2 points**

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant lorsqu'une affirmation est fausse.

1. Si une suite (u_n) converge vers 0 alors la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$.
2. Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$ alors la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n}$ converge vers 0.
3. Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$ et une suite (v_n) est convergente, alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n v_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : E.C. **….. / 2 points**

q est un réel différent de 1, démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 4 : **….. / 5 points**

Déterminer les limites des suites définies par :

$$u_n = -3n^3 + 8n^2 - 1 v_n = \left(\frac{1}{n} - 3\right)(6n + 7) w_n = \frac{n^2 - n + 2}{-n^2 + 4n}$$

$$t_n = \frac{7 - \frac{2}{n}}{1 + n^2} \qquad z_n = 2n - \sqrt{n}$$

Exercice 5:*Culture de bactéries* **... / 8 points**

La bactérie E.Coli pourrait permettre de produire du biocarburant par modification génétique. L'expérimentation montre que dans un milieu nutritif optimisé, la masse de bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% par jour. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduitinitialement 1 kilogramme de bactéries. Ensuite,chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve et on prélève un échantillon de bactéries pour suivre la modification génétique. Ces opérations retirent 100grammes de bactéries de la cuve. On souhaite produire 30 kilogrammes de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{u}_0 = 1000 \\ \mathrm{u}_{n+1} = 1{,}2\mathrm{u}_n - 100 \end{cases}$$

1. Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.*On précisera en particulier ce que représente u_n.*
2. Déterminer la quantité de bactéries au bout de 2 jours d'expérimentation.
3. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30kg.
   a) A l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.(*sans justification*)
   b) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé. Compléter cet algorithme puis le traduire en langage python.

```
n⟵0
u←1000
Tant que ................
        u←.............
        n←n+1
Fin tant que
Afficher……
```

Langage Python :

   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est croisssante.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 500$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Conjecturer la limite de (u_n). La modélisation choisie vous parait-elle réaliste ?

Correction DS n° 1 – TS

Exercice 1 : E.C. Extrait du n°61 p 22 Exercice 2 : E.C. Extrait du n° 33 p 47 Exercice 3 : E.C. n° 26 p 18

Exercice 4 :

- $u_n = -3n^3 + 8n^2 - 1$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 = -\infty$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 8n^2 = +\infty$
  Par somme **F.I. « -∞+∞ »**

  Levons l'indétermination

  $u_n = -3n^3 + 8n^2 - 1 = n^3\left(-3 + \frac{8}{n} - \frac{1}{n^3}\right)$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^3} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3 + \frac{8}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = -3$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

  par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(-3 + \frac{8}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = -\infty$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

- $v_n = (\frac{1}{n} - 3)(6n + 7)$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 = -3$,par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 3 = -3$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 7 = 7$, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n + 7 = +\infty$

  par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - 3\right)(6n + 7) = -\infty$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

- En étude directe on obtient une **FI « $\frac{\infty}{\infty}$ »** .Levons l'indétermination

  $$w_n = \frac{n^2 - n + 2}{-n^2 + 4n} = \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(-1 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{-1 + \frac{4}{n}}$$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ on en déduit que
  $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} = 1$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \frac{4}{n} = -1$
  par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{-1 + \frac{4}{n}} = -1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1$

- $t_n = \frac{7 - \frac{2}{n}}{1 + n^2}$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7 - \frac{2}{n} = 7$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n^2 = +\infty$
  par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7 - \frac{2}{n}}{1 + n^2} = 0^+$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0^+$

- $z_n = 2n - \sqrt{n}$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$
  Par somme **FI « +∞-∞ »**

  Levons l'indétermination

  $z_n = 2\sqrt{n} \times \sqrt{n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}(2\sqrt{n} - 1)$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} - 1 = +\infty$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
  par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}(2\sqrt{n} - 1) = +\infty$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$

  Ou bien : $z_n = n(2 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(2 - \frac{1}{\sqrt{n}})$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 2$
  Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$

Exercice 5 :

1. u_n représente la quantité (en grammes) de bactéries présente dans la culture après n jours d'expérimentation. On introduit 1 kilogramme de bactérie au départ, ainsi $u_0 = 1000$.
   D'autre part, chaque jour, la masse de bactérie augmente de 20% et 100 grammes sont retirés, on a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}: \ u_{n+1} = u_n + \frac{20}{100}u_n - 100 = u_n\left(1 + \frac{20}{100}\right) - 100 = 1{,}2\, u_n - 100$$

2. $u_0 = 1000$

$$u_1 = 1{,}2 \times 1000 - 100 = 1100$$
$$u_2 = 1{,}2 \times 1100 - 100 = 1220$$

La quantité de bactéries au bout de 2 jours d'expérimentation est de 1220 grammes.

3.

a) A l'aide de la calculatrice, on obtient : $n = 23$.
Interprétation : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 23 : u_n \geq 30000$, c'est-à-dire : il faudra au moins 23 jours pour que la masse de bactérie dépasse 30 kg.

b)

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 1000$
Tant que u<30000
    $u \leftarrow 1{,}2u - 100$
    $n \leftarrow n + 1$
Fin tant que
Afficher n

Langage Python :

```
n=0
u=1000
while u<30000:
    u=1.2*u-100
    n=n+1
print(n)
```

Ou bien : langage Python

```
Def bactéries () :
  n=0
  u=1000
  while u<30000:
      u=1.2*u-100
      n=n+1
  return n
```

4.

a) Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $u_n \geq 1000$ »

- Initialisation : $n = 0$
  $u_0 = 1000 \geq 1000$ donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit k un entier naturel fixé.
  Supposons que $P(k)$ est vraie c'est-à-dire : $u_k \geq 1000$
  Montrons que $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire : $u_{k+1} \geq 1000$
  $u_k \geq 1000$ par hypothèse de récurrence
  $1{,}2\ u_k \geq 1000 \times 1{,}2$ [en multipliant par $1{,}2 > 0$ *ordre inchangé*]
  $1{,}2\ u_k - 100 \geq 1200 - 100$ [en soustrayant 100]
  $u_{k+1} \geq 1100 > 1000$ donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire
- Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 1000$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 1{,}2u_n - 100 - u_n = 0{,}2u_n - 100$
Or d'après le a) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 1000$

$$0{,}2u_n \geq 0{,}2 \times 1000$$
$$0{,}2u_n - 100 \geq 0{,}2 \times 1000 - 100$$
$$0{,}2u_n - 100 \geq 100$$
$$u_{n+1} - u_n \geq 100 > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$ Conclusion : la suite (u_n) est (strictement) croissante.

5.

a) $\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1{,}2u_n - 100 - 500 = 1{,}2(v_n + 500) - 600 = 1{,}2v_n$
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 500$

b) On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}: v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1{,}2^n$
Or $\forall n \in \mathbb{N}: v_n = u_n - 500$ *donc* $u_n = v_n + 500$ et $u_n = 500 \times 1{,}2^n + 500$

c) On conjecture que la limite de la suite (u_n) vaut $+\infty$.
Autrement dit : la masse de bactérie dans la culture augmente (car la suite est croissante) indéfiniment (car la limite vaut $+\infty$), ce qui est peu probable. La modélisation ne semble donc pas très réaliste.

Correction avec la propriété sur les limites d'une suite géométrique :

$q = 1{,}2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}2^n = +\infty$ de plus $u_0 = 500 > 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$