Nom :……………………………………… **DS n°3** **T.S.**
Prénom : ……………………………… **le 18.11.2019**

Capacités évaluées :	***Avis du professeur*** ***Non acquis***	 ***En cours d'acquisition***	 ***Acquis***
Exercice 1 : Suites numériques			
Démontrer par récurrence			
Démontrer un théorème du cours – démonstration exigible			
Etudier la limite d'une suite			
Exercices 2, 3 et 4 : Géométrie dans l'espace			
Construire un point défini par une relation vectorielle			
Décomposer un vecteur en fonction de deux vecteurs donnés			
Montrer que des vecteurs/points sont coplanaires			
Etudier la position relative de deux droites ; d'une droite et d'un plan			
Justifier que 3 points définissent un plan			
Calculer l'aire d'un triangle			

Barème :

Ex 1	**Ex 2**	**Ex 3**	**Ex 4**	**TOTAL**
/5,5	/4,5	/6,5	/3,5	/ 20

Exercice 1 :

Partie A : Démonstration

1. Soit a est un réel strictement positif.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+a)^n \geq 1+na$
2. Déduisez de ce qui précède la limite d'une suite géométrique de raison $q > 1$.
3. Enoncez le théorème ainsi démontré.

Partie B : Application 1

Déterminer la limite des suites définies par :

1. $u_n = \left(1+\sqrt{3}\right)^n$
2. $v_n = \frac{1}{1{,}01^n}$

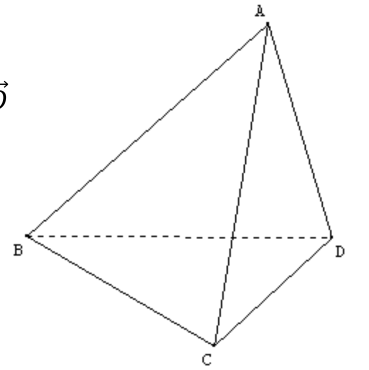
Partie C : Application 2

(u_n) est la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n, par la relation : $u_{n+1} = au_n + b$
(a et b sont deux nombres réels non nuls, $a \neq 1$)

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1;1[$ alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Exercice 2 :

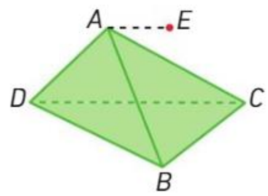


ABCD est un tétraèdre et I le milieu de [AB]. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

1. Placer les points I et G sur la figure ci-contre.
2.
   a) Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$
   b) En déduire une expression de $\overrightarrow{IG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IC} et\ \overrightarrow{ID}$.
   c) Qu'en déduire sur les points I, G, D et C ?
3. Construire l'intersection de (DG) et (ABC). *Justifier*

Exercice 3 :

**** Les questions1, 2, 3 et 4 de cet exercice sont indépendantes****



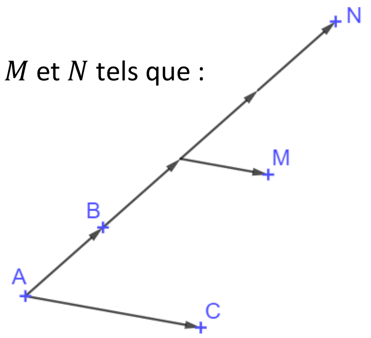
Question 1 : [EC]

On considère le tétraèdre ABCD. E est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Question 2 : [EC]

Soient A, B et C trois points de l'espace, non alignés. On considère les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AB}$ *(figure ci-contre)*



Montrer que le point C appartient à la droite (MN)

Question 3 : [EC]

La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(0; 4; 5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}18\\-3\\9\end{pmatrix}$

La droite Δ est définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases}x = 1 + 6t' \\ y = -2 + t' \\ z = 3 + 3t'\end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
2.
   a) Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont-elles parallèles ?
   b) Peut-on affirmer qu'elles sont sécantes ?
   c) Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ et Δ.
3. Le point $B(-11; -4; -3)$ appartient-il à Δ ?

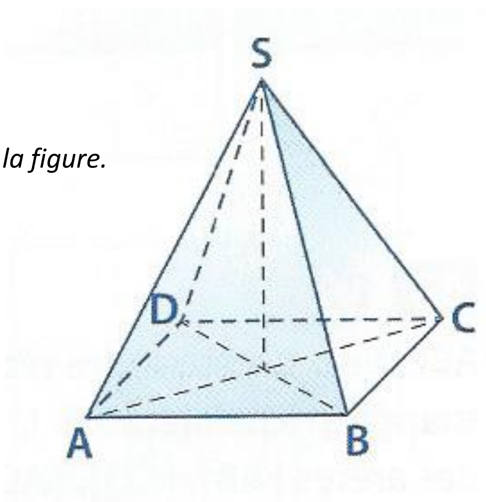
Question 4 :

Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$de l'espace, on considère 4 points : A$(1\,;-1\,;-1)$$B(5\,;0\,;-3)$ $C(2\,;-2\,;-2)$ *et* $D(0\,;5\,;-2)$

a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
b) Le point D appartient-il à ce plan ?

Exercice n°4

ABCD est une pyramide régulière dont la base est un carré de centre un point O. La droite (SO) est la hauteur de la pyramide issue de S. Toutes les arêtes sont de même mesure égale à « a ».



1. Démontrer que les droites (AS) et (DB) sont orthogonales.

2. Soit IJK les milieux respectifs des arêtes [AB], [BS] et [AD]. *Compléter la figure.*
   a. Démontrer que le triangle KIJ est rectangle en I.
   b. Démontrer que l'aire du triangle KIJ est égale à $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$.

Correction DS n°3 - TS

Exercice 1 :

Partie A : Démonstration

1. Soit a est un réel strictement positif.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+a)^n \geq 1+na$
2. Déduisez de ce qui précède la limite d'une suite géométrique de raison $q > 1$.
3. Enoncez le théorème ainsi démontré.

1. Voir cours
2. Voir cours
3. Le théorème ainsi démontré est : La suite de terme général (q^n) avec $q > 1$ tend vers $+\infty$.

Partie B : Application 1

Déterminer la limite des suites définies par : 1. $u_n = \left(1+\sqrt{3}\right)^n$ 2. $v_n = \frac{1}{1{,}01^n}$

1. $q = 1+\sqrt{3} > 1$ donc d'après le théorème démontré ci-dessus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. $q = 1{,}01 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}01^n = +\infty$
   Puis par passage à l'inverse (ou par quotient) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Partie C : Application 2

(u_n) est la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n, par la relation : $u_{n+1} = au_n + b$
(a et b sont deux nombres réels non nuls, $a \neq 1$)

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - \frac{ba}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = a\, v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = a$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1;1[$ alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

- Terme général de la suite géométrique (v_n) : $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ v_n = v_0 \times q^n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n$
- Terme général de la suite (u_n) : $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$

Or $a \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)$ ainsi par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n = 0$

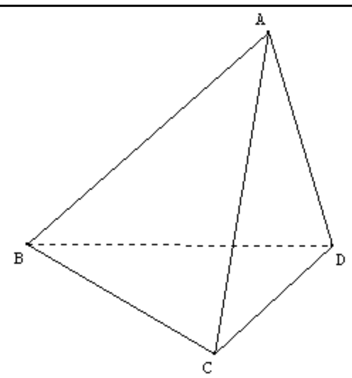
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a}$

Conclusion : par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$

Exercice 2 :

ABCD est un tétraèdre et I le milieu de [AB]. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

1. Placer les points I et G sur le figure ci-contre.
2.
   a) Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$



$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{ID}$
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}$
Or I est le milieux de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{BI}$
Donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AI}$
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$

b) En déduire une expression de $\overrightarrow{IG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IC} et \overrightarrow{ID}$.

$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CG}$ d'après la relation de Chasles
$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}$
$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$
$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)$ d'après la question précédente : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$
$\overrightarrow{IG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$

c) Qu'en déduire sur les points I, G, D et C ?

D'après la question précédente, on a : $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$
Donc il existe un couple $(a; b) \neq (0; 0)$ tel que $\overrightarrow{IG} = a\overrightarrow{IC} + \mathrm{b}\overrightarrow{ID}$
On en déduit alors que les vecteurs $\overrightarrow{IG}$; $\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{ID}$ sont coplanaires et ont un point commun
Ainsi, les points I, G, C et D sont coplanaires.

3. Construire l'intersection de (DG) et (ABC). *Justifier*

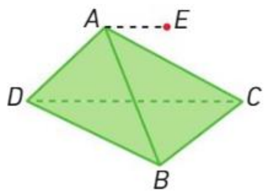
D'après la question précédente, les points I, G, C et D sont coplanaires.
Donc les droites (IC) et (DG) sont coplanaires et non parallèles donc elles sont sécantes en un point nommé K.
Or :

- $K \in (IC)$ et $(IC) \subset (ABC)$ (puisque I est le milieu de [AB]) donc $K \in (ABC)$
- $K \in (DG)$

Donc K est le point d'intersection de la droite (DG) et du plan (ABC).

Exercice 3 :

Question 1 : [EC]



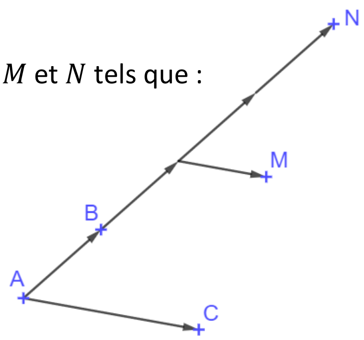
On considère le tétraèdre ABCD. E est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Voir Corrigé du n° 27 p 324 (question 2)

Question 2 : [EC]

Soient A, B et C trois points de l'espace, non alignés. On considère les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AB}$ *(figure ci-contre)*
Montrer que le point C appartient à la droite (MN)



Voir Corrigé du n° 3 p 313

Question 3 : [EC]

La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(0; 4; 5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}18\\-3\\9\end{pmatrix}$

La droite Δ est définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 6t' \\ y = -2 + t' \\ z = 3 + 3t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$