Nom :..Prénom : .... **DS n°5** **T.S.**

	Avis du professeur		
Capacités évaluées :	*Non acquis*	*En cours d'acquisition*	*Acquis*
Fonction :			
Déterminer une limite			
Etudier les variations			
Justifier l'existence d'une solution à une équation $f(x) = k$			
Probabilité/suites:			
Compléter un arbre pondéré			
Calculer des probabilités avec la formule des probabilités totales			
Mener un raisonnement par récurrence			
Etudier la convergence d'une suite			
Montrer qu'une suite est géométrique			
Déterminer la limite d'une suite			
Justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale			
Calculer des probabilités avec une loi binomiale			
Compétences			
Calculer			
Démontrer			
Raisonner			

Ex 1	Ex 2	Ex 3	TOTAL
/7,5	/4,5	/6	**/20**

Exercice 1 :

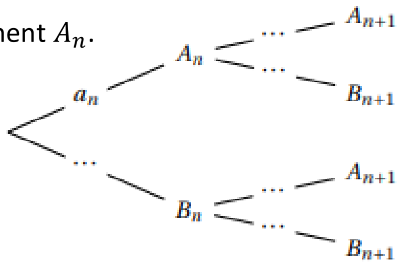
Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B. On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- Si le joueur achève une partie A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8.
- Si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0{,}7$.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :

- A_n : « la $n-ième$ partie est une partie de type A »
- B_n : « la $n-ième$ partie est une partie de type B »

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.



1.
   a) Compléter l'arbre pondéré ci-contre.

   b) Montrer que pour tout entier naturel ≥ 1 , on a : $a_{n+1} = 0{,}5\ a_n + 0{,}3$

Dans la suite de l' exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.
La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et pour tout entier naturel $n \geq 1 : a_{n+1} = 0{,}5\ a_n + 0{,}3$

2. Etude d'un cas particulier. Dans cette question, on suppose que $a = 0{,}5$.
   a) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0{,}6$.
   b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   c) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Etude du cas général. Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0; 1]$.
   On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = a_n - 0{,}6$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
   b) En déduire que : $\forall n \geq 1 : a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?
   d) La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

Exercice 2 : *On donnera la valeur décimale approchée arrondie à 10^{-3} du résultat.*

Pour prévenir deux défauts A et B des pièces fabriquées par une usine, on décide de soumettre l'ensemble des pièces à des tests. Les études statistiques menées sur un effectif assez grand ont montré que :

- 8%des pièces présentent le défaut A ;
- Parmi les pièces atteintes de défaut A, 15% ont le défaut B.
- Parmi les pièces non atteintes de défaut A, 5% ont le défaut B.

On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée et on considère les évènements suivants :

- A : « la pièce présente le défaut A »
- B : « la pièce présente le défaut B »

1.
   a) Calculer la probabilité que la pièce prélevée au hasard présente les deux défauts A et B.
   b) Montrer que $P(B) = 0{,}058$.
   c) Une pièce est atteinte du défaut B. Quelle est la probabilité qu'elle est atteinte du défaut A ?

2. Démontrer que la probabilité d'obtenir une pièce non défectueuse c'est-à-dire sans aucun défaut, est égale à $0{,}874$.

3. On prélève au hasard 12 pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 12 pièces.Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 12 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement.
   a) Déterminer la loi de X. Préciser les paramètres.
   b) Calculer $P(X = 3)$
   c) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 5 pièces défectueuses dans ce lot.

Exercice 3 :

Partie A :

Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $u(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

1. Déterminer la limite de la fonction u en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction u sur $[1; +\infty[$
3. Démontrer qu'il existe un unique réel c de $[1; +\infty[$ tel que $u(c) = 0$.
   En utilisant la calculatrice préciser la valeur de c.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3+3}{x-1}$

On nomme $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.

1. Soit a un réel strictement supérieur à 1.
   Justifier que la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $f'(a) = 1$.
2.
   a) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$par $g(x) = f'(x) - 1$
   Démontrer que, pour tout réel x de $[1; +\infty[$: $g(x) = \frac{2u(x)}{(x-1)^2}$. ($u$ étant la fonction définie à la partie A)
   b) En déduire l'existence d'une unique tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à la droite $\mathcal{D}$ et en donner son équation.

Correction DS 5 – TS

Exercice 1 :

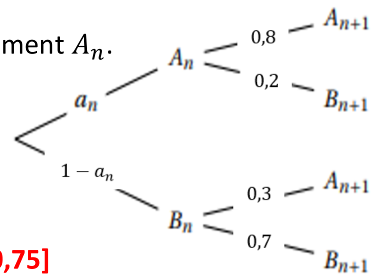
Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B. On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- Si le joueur achève une partie A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8.
- Si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :

- A_n : « la $n-ième$ partie est une partie de type A »
- B_n : « la $n-ième$ partie est une partie de type B »

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.



4.

c) Compléter l'arbre pondéré ci-contre. **[0,5]**

d) Montrer que pour tout entier naturel ≥ 1 , on a : $a_{n+1} = 0{,}5\ a_n + 0{,}3$**[0,75]**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = a_n \times 0{,}8 + (1 - a_n) \times 0{,}3 = 0{,}5a_n + 0{,}3$

Dans la suite de l' exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.
La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$: $a_{n+1} = 0{,}5\ a_n + 0{,}3$

5. Etude d'un cas particulier. Dans cette question, on suppose que $a = 0{,}5$.

d) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0{,}6$. **[1]**

Pour tout entier naturel n, $n \geq 1$ on note $P(n)$: « $0 \leq a_n \leq 0{,}6$ »
Initialisation : $n = 1$
On a $a_1 = 0{,}5$ et $0 \leq 0{,}5 \leq 0{,}6$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel non nul fixé.
Supposons que $P(k)$ est vraie c'est-à-dire : $0 \leq a_k \leq 0{,}6$
Montrons que $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire : $0 \leq a_{k+1} \leq 0{,}6$
On sait, par hypothèse de récurrence, que : $0 \leq a_k \leq 0{,}6$
Donc $0 \leq 0{,}5a_k \leq 0{,}6 \times 0{,}5$ (par multiplication par $0{,}5 > 0$)
Donc $0{,}3 \leq 0{,}5a_k + 0{,}3 \leq 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}3$
Donc $0 < 0{,}3 \leq a_{k+1} \leq 0{,}6$
Ainsi, $P(k+1)$ est vrai.

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

e) Montrer que la suite (a_n) est croissante.**[1]**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} - a_n = 0{,}5a_n + 0{,}3 - a_n = -0{,}5a_n + 0{,}3$
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq a_n \leq 0{,}6$
$0 \geq -0{,}5a_n \geq 0{,}6 \times (-0{,}5)$ (par multiplication par $-0{,}5 < 0$)
$0{,}3 \geq -0{,}5a_n + 0{,}3 \geq 0{,}6 \times (-0{,}5) + 0{,}3$
$0{,}3 \geq -0{,}5a_n + 0{,}3 \geq 0$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et la suite (a_n) est croissante.

f) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite. **[0,5(cv)+0,5(lim)]**

La suite (a_n) est croissante (question 2.b)) et majorée par 0,6 (question 2.a)).
Or toute suite croissante et majorée converge
Donc (a_n) converge vers ℓ

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} = 0{,}5\, a_n + 0{,}3$
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ donc par produit et somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5a_n + 0{,}3 = 0{,}5\ell + 0{,}3$
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$
Donc $0{,}5\ell + 0{,}3 = \ell \Leftrightarrow 0{,}3 = 0{,}5\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$ **Conclusion** : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}6$

6. Etude du cas général. Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0; 1]$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = a_n - 0{,}6$.

e) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme. **[0,75].**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}5a_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5(u_n + 0{,}6) - 0{,}3 = 0{,}5u_n$
Donc (u_n) est une suite géométrique de raion $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0{,}6 = a - 0{,}6$

f) En déduire que : $\forall n \geq 1 : a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$**[0,5 (u_n)+0,5(a_n)]**

(u_n) est une suite géométrique de raion $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_1 = a - 0{,}6$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times q^{n-1} = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1}$
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = u_n + 0{,}6 = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$

g) Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ? **[0,75 (lim)+0,25(ccl)]**

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$ car $-1 < 0{,}5 < 1$
Donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} = 0$
Puis par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6 = 0{,}6$
Conclusion : la limite de la suite (a_n) est égale à 0,6, cette limite ne dépend pas de la valeur de a.

h) La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ? **[0,5]**

On sait que la limite de la suite (a_n) est égale à 0,6 donc, pour un très grand nombre de parties jouées, la probabilité de jouer une partie de type A tend vers 0,6 et par conséquent, la probabilité de jouer une partie de type B tend vers 0,4.
On en déduit que si le joueur joue un très grand nombre de parties, la publicité la plus vue sera la publicité associée à la partie de type A.

Exercice 2 : *On donnera la valeur décimale approchée arrondie à 10^{-3} du résultat.*
Pour prévenir deux défauts A *et* B des pièces fabriquées par une usine, on décide de soumettre l'ensemble des pièces à des tests. Les études statistiques menées sur un effectif assez grand ont montré que :

- 8% des pièces présentent le défaut A ;
- Parmi les pièces atteintes de défaut A, 15% ont le défaut B.
- Parmi les pièces non atteintes de défaut A, 5% ont le défaut B.

On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée et on considère les évènements suivants :

- A : « la pièce présente le défaut A »
- B : « la pièce présente le défaut B »

4.
d) Calculer la probabilité que la pièce prélevée au hasard présente les deux défauts A et B.**[0,25]**

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}08 \times 0{,}15 = 0{,}012$

e) Montrer que $P(B) = 0{,}058$. **[0,75]**

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}012 + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}012 + 0{,}92 \times 0{,}05 = 0{,}058$

f) Une pièce est atteinte du défaut B. Quelle est la probabilité qu'elle est atteinte du défaut A ? **[0,75]**

$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}012}{0{,}058} \approx 0{,}207$

5. Démontrer que la probabilité d'obtenir une pièce non défectueuse c'est-à-dire sans aucun défaut, est égale à 0,874. **[0,5]**

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}92 \times 0{,}95 = 0{,}874$

6. On prélève au hasard 12 pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 12 pièces. Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 12 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement.

d) Déterminer la loi de X. Préciser les paramètres. **[1]**

A chaque épreuve, il y a deux issues : S « la pièce est défectueuse » et $\overline{S}$. C'est une épreuve de Bernoulli.
On répète cette expérience 12 fois de façon indépendante et identique. C'est un schéma de Bernoulli.
$P(S) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}874 = 0{,}126$
X est la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 12 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0{,}126$.

e) Calculer $P(X = 3)$ **[0,5]**

$P(X = 3) = \binom{12}{3} \times 0{,}126^3 \times (1 - 0{,}126)^{12-3} \approx 0{,}131$

f) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 5 pièces défectueuses dans ce lot. **[0,75]**

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0{,}988 \approx 0{,}012$

<u>Exercice 3 :</u>

<u>Partie A :</u>

Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $u(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

4. Déterminer la limite de la fonction u en $+\infty$. **[0,5]**

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 + x - 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
D'après la propriété : la limite à l'infini d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degré. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$

5. Etudier les variations de la fonction u sur $[1; +\infty[$ **[0,25 (dérivée)+ 1 (tableau)]**

u est une fonction polynôme donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in [1; +\infty[$: $u'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
$3x^2 - 4x + 1 = 0$ $\Delta = 4 > 0$ l'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{3}$

x	1	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	0 $+$	
Variations de u	-2 $\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 1 - 2 = -2$

6. Démontrer qu'il existe un unique réel c de $[1;+\infty[$ tel que $u(c)=0$. **[0,75]**
En utilisant la calculatrice préciser la valeur de c.

u est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier u est continue sur $[1;+\infty[$.
D'après la question 2., u est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $f(1)=-2<0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$
Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution dans $[1;+\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $c=2$ (en effet : $u(2)=0$)

Partie B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^3+3}{x-1}$
On nomme $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=x$.

3. Soit a un réel strictement supérieur à 1.
Justifier que la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $f'(a)=1$. **[1]**

La tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$. (par définition)
D'autre part, la droite d'équation $y=x$ a pour coefficient directeur 1.
Or deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
Donc la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $f'(a)=1$.

4.
c) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $g(x)=f'(x)-1$
Démontrer que, pour tout réel x de $]1;+\infty[$: $g(x)=\frac{2u(x)}{(x-1)^2}$. ($u$ étant la fonction définie à la partie A)
[1]

$\forall x\in]1;+\infty[: f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-(x^3+3)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{3x^3-3x^2-x^3-3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-3}{(x-1)^2}$

$\forall x\in]1;+\infty[: g(x)=f'(x)-1=\frac{2x^3-3x^2-3}{(x-1)^2}-1=\frac{2x^3-3x^2-3-(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-3-x^2+2x-1}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-4x^2+2x-4}{(x-1)^2}=\frac{2u(x)}{(x-1)^2}$

d) En déduire l'existence d'une unique tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à la droite $\mathcal{D}$ et en donner son équation. **[1]**

La tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $f'(x)-1=0$ c'est-à-dire : $g(x)=0$
Or $\forall x\in]1;+\infty[: g(x)=\frac{2u(x)}{(x-1)^2}$
Donc $g(x)=0 \Leftrightarrow u(x)=0$
Or d'après la question A3, l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution : $x=2$.
Donc l'équation $g(x)=0$ admet également une unique solution : $x=2$.

Conclusion : Il existe une unique tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à la droite $\mathcal{D}$, il s'agit de la tangente au point d'abscisse 2.
Cette tangente a pour équation : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$
Or $f(2)=\frac{2^3+3}{2-1}=11$ et $f'(2)=1$
Donc $T_2 : y=1(x-2)+11$
Donc $T_2 : y=x+9$