TS1 **Devoir surveillé n°07** **mardi 28 mars 2017**

Nom : **Prénom :**

Compétences	*Acquis*	*En cours d'acquisition*	*Non acquis*
Déterminer une forme exponentielle			
Arguments-angles orientés			
Déterminer des lieux géométriques			
Détermination de paramètres à partir d'une lecture graphique.			
Etude de limites			
Calcul de fonction dérivée			
Signe d'une expression			
Position relative de deux courbes			
Raisonnement par récurrence			
Justifier qu'une suite géométrique			

Barème	Exercice n°1 : 3 points	Exercice n°2 : 6 points	Exercice n°3 : 6 points	Exercice n°4 : 4 points	Total : 20 points
note					

<u>Exercice n°1 :</u> Vrai-Faux

Dans chacun des cas, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$,$\vec{v}$)

(E) est l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, d'inconnue z.

1. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de (E) sont les nombres complexes $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.
2. La forme exponentielle de z_1 est $4e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.
4. Soit A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 .Le triangle OAB est rectangle et isocèle

<u>Exercice n°2 :</u>

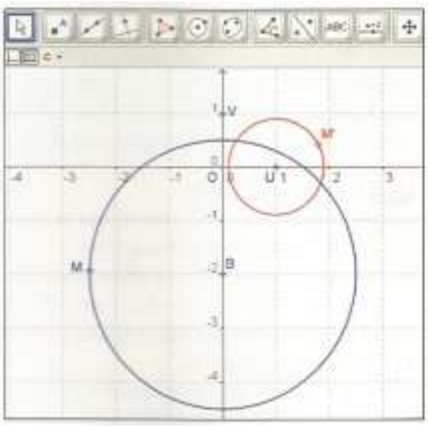
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$,$\vec{v}$).

A et B sont les points d'affixes respectives $z_A=2-i$ et $z_B=-2i$.

Vous ferez une figure que vous complèterez au cours de l'exercice.

A tout point M, différent de B, d'affixe z on associe le point M'd'affixe z' définie par : $z' = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1. En utilisant la méthode sur les arguments de nombres complexes et angles orientés, Déterminer dans chaque cas, l'ensemble des points M d'affixe z lorsque
   a) z' est un nombre réel. (ensemble E)
   b) z' est un imaginaire pur. (ensemble F)
2. Déterminer l'ensemble T des points M d'affixe z lorsque $|z'|=1$
3. Un logiciel de géométrie permet de visualiser l'ensemble des points M' lorsque M parcourt le cercle de centre B et de rayon R
   a) Expliquer pourquoi $|z+2i|=R$
   b) Calculer$|z'-1|\mathrm{x}|z+2i|$; en déduire le lieu des points M' lorsque M parcourt le cercle de centre B et de rayon R

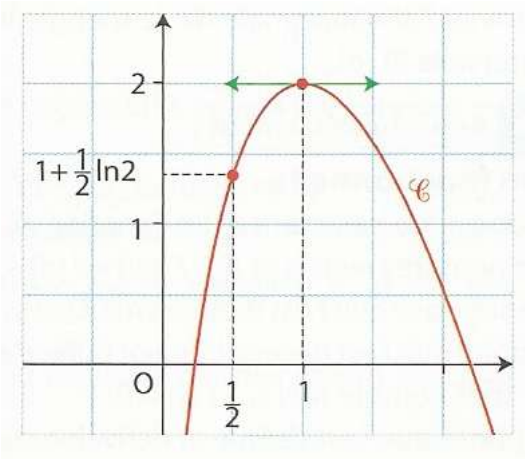


<u>Exercice n°3 :</u>

Partie A

f est une fonction définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = ax + (bx + c)lnx$ où a, b et c sont des nombres réels, et dont la courbe représentative C est donnée ci-dessous.

En utilisant les informations données sur le graphique ci-dessous déterminer les valeurs de a, b et c.



Partie B

g est la fonction définie sur]0 ;+∞[par $g(x) = 2x + (1 - 3x)lnx$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en +∞.
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.
3. Etudier pour x>0 le signe de $\frac{1-x}{x}$ et le signe de $-3lnx$. En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de la fonction g.
4. On note Δ la droite d'équation $y = 2x$ .Tracez la dans le repère ci-dessus
    a) Résoudre dans $]0;$+∞[l'équation $(1 - 3x)lnx = 0$ et donner une interprétation graphique des solutions.
    b) Etudier la position de la courbe représentative de g par rapport à la droite Δ.

<u>Exercice n°4 :</u>

U est la suite définie par u_0= e^{2}et, pour tout entier naturel n, u_{n+1}=$\sqrt{\text{ex}u_n}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0, u_n > 0.$
2. V est la suite définie sur ℕ par $v_n = \ln u_n - 1.$
    a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
    b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
    c) U admet-elle une limite ?si oui laquelle ?

Correction devoir surveillé n°8 : complexes+fonction ln : (2h) TS1

Exercice n°1 : Vrai-Faux

Dans chacun des cas, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

(E) est l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, d'inconnue z.

1. **Les solutions dans $\mathbb{C}$ de (E) sont les nombres complexes $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.**

   $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, $\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times4=12-16=-4<0$ 2 solutions complexes conjuguées

   $z_1=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}$ et $z_2=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}$ donc $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$. donc **VRAI**

2. **La forme exponentielle de z_1 est $4e^{i\frac{\pi}{3}}$.**

   $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2 \neq 4$ donc **FAUX**.

   De plus $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$ donc $\theta=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ce qui confirme la réponse

3. $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   $|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$

   De plus $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{-1}{2}\end{cases}$ donc $\theta=\frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $z_1=2e^{i\frac{-\pi}{6}}$

   Donc $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{-\pi}{6}}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{-\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{6}}\times e^{i\frac{-\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc **VRAI**

4. **Soit A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2. Le triangle OAB est rectangle et isocèle.**

   $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{z_A}{z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\left|\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ donc $\frac{|z_{\overrightarrow{OA}}|}{|z_{\overrightarrow{OB}}|}=1 \Leftrightarrow \frac{OA}{OB}=1 \Leftrightarrow OA = OB$

   De plus $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}\right)=\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc le triangle OAB est équilatéral et non isocèle et rectangle

   Donc **FAUX**

Exercice n°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.A et B sont les points d'affixes respectives $z_A=2-i$ et $z_B=-2i$.

A tout point M, différent de B, d'affixe z on associe le point M'd'affixe z' définie par : $z' = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1. **En utilisant la méthode sur les arguments de nombres complexes et angles orientés, Déterminer dans chaque cas, l'ensemble des points M d'affixe z lorsque**

   a) **z' est un nombre réel. (ensemble E)**

- Si $z'=0$, $\frac{z-2+i}{z+2i}=0 \Leftrightarrow z-2+i=0 \Leftrightarrow z=2-i$ donc M=A
- Si $z'\neq 0$, $z' \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z')=0[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-2+i}{z+2i}\right)=0[\pi]$

  $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=0[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right)=0[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}))=0[\pi]$

  Donc l'ensemble des points M est la droite (AB) privée des points A et B.
- **Conclusion** : E est la droite (AB) privée du point B.

   b) **z' est un imaginaire pur. (ensemble F)**

- Si $z'=0$, $\frac{z-2+i}{z+2i}=0 \Leftrightarrow z-2+i=0 \Leftrightarrow z=2-i$ donc M=A
- Si $z'\neq 0$, $z' \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z')=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-2+i}{z+2i}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$

  $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}))=\frac{\pi}{2}[\pi]$

  Donc l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
- **Conclusion** : F est le cercle de diamètre [AB] privé du point B.

2. **Déterminer l'ensemble T des points M d'affixe z lorsque $|z'|=1$**

$|z'|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2+i}{z+2i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z_{\overrightarrow{AM}}|}{|z_{\overrightarrow{BM}}|}=1 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM}=1 \Leftrightarrow AM = BM$

Donc l'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AB].

3. **Un logiciel de géométrie permet de visualiser l'ensemble des points M' lorsque M parcourt le cercle de centre B et de rayon R**

   a) **Expliquer pourquoi $|z+2i|=R$**

   M appartient au cercle de centre B et de rayon R si et seulement si $BM = R$

   Or $BM = |z_{\overrightarrow{BM}}| = |z - z_B| = |z+2i|$ donc $BM = R \Leftrightarrow |z+2i|=R$

   b) **Calculer $|z'-1| \times |z+2i|$; en déduire le lieu des points M' lorsque M parcourt le cercle de centre B et de rayon R**

   $z' = \frac{z-2+i}{z+2i}$ donc $z' - 1 = \frac{z-2+i}{z+2i} - 1 = \frac{z-2+i-z-2i}{z+2i} = \frac{-2-i}{z+2i}$ donc $|z'-1| = \left|\frac{-2-i}{z+2i}\right| = \frac{|-2-i|}{|z+2i|}$

   $|z'-1| = \frac{\sqrt{5}}{|z+2i|} \Leftrightarrow |z'-1| \times |z+2i| = \sqrt{5}$

   Lorsque M parcourt le cercle de centre B et de rayon R, $|z+2i|=R$ donc $|z'-1| \times R=\sqrt{5}$

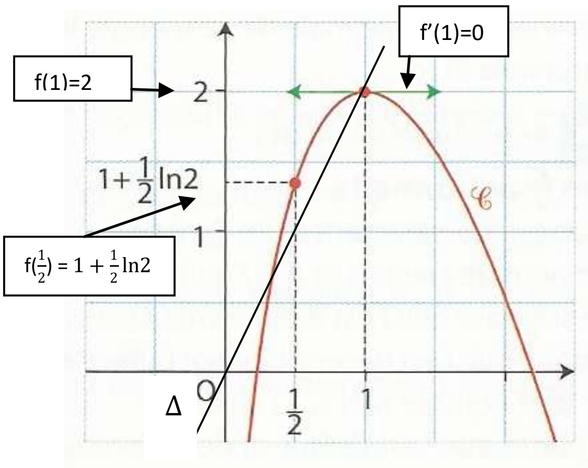
   Donc $|z'-1| = \frac{\sqrt{5}}{R}$ Soit I le point d'affixe 1. $|z'-1| = \frac{\sqrt{5}}{R} \Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{IM'}}| = \frac{\sqrt{5}}{R}$

   Donc M' appartient au cercle de centre le point I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{R}$.

<u>Exercice n°3 :</u>

Partie A

f est une fonction définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = ax + (bx+c)lnx$ où a, b et c sont des nombres réels, et dont la courbe représentative C est donnée ci-dessous.
En utilisant les informations données sur le graphique ci-dessous déterminer les valeurs de a, b et c.



Nous devons déterminer 3 valeurs : a, b et c. Donc nous allons définir 3 équations à partir des données du graphique :

- $f(1)=2 \Leftrightarrow a1 + (b1+c)ln1 = 2 \Leftrightarrow a + (b+c)\times 0 = 2 \Leftrightarrow a = 2$
- $f(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow a\frac{1}{2} + \left(b\frac{1}{2}+c\right)ln\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$
  $\Leftrightarrow 2\times\frac{1}{2} + (\frac{b}{2}+c)(-ln2) = 1 + \frac{1}{2}ln2$
  $\Leftrightarrow 1 - (\frac{b}{2}+c)(ln2) = 1 + \frac{1}{2}ln2$
  $\Leftrightarrow -(\frac{b}{2}+c)(ln2) = \frac{1}{2}ln2$
  $\Leftrightarrow -(\frac{b}{2}+c) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{2}+c = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow b + 2c = -1$
- $f'(1)=0$ or $f'(x) = a + blnx + (bx+c)\times\frac{1}{x}$
- $f'(1)=0 \Leftrightarrow 2 + bln1 + (b1+c)\times\frac{1}{1} = 0 \Leftrightarrow 2 + b + c = 0$

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} b+2c = -1 \\ b+c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+2c = -1 \\ -b-c = +2 \end{cases}$$
$$c = 1$$

Or $b+c=-2$ donc $b+1 = -2 \Leftrightarrow b = -3$ donc $f(x) = 2x + (1-3x)lnx$.

Partie B : g est la fonction définie sur]0 ;+∞[par $g(x) = 2x + (1-3x)lnx$.

1. **Déterminer les limites de g en 0 et en +∞.**

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$: $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$ $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0} 1-3x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty \end{matrix}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$: $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 1\text{-}3x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} (1-3x)lnx = -\infty$

Donc forme indéterminée du type « +∞—∞ ». Levons l'indétermination :

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \ = x(\,2 + \frac{lnx}{x} - 3lnx) \text{ or } \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \text{-}3\ln x = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{lnx}{x} - 3lnx = -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

2. **Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.**

$f'(x) = \ 2 - 3lnx \ + (-3x+1)\text{x}\frac{1}{x}$ donc f'(x) = $-3lnx + \frac{-3x+1}{x} + 2$ =$-3lnx + \frac{-3x+1+2x}{x}$

$f'(x)$ ==$-3lnx + \frac{-x+1}{x}$

3. **Etudier pour x>0 le signe de $\frac{1-x}{x}$ et le signe de $-3lnx$. En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de la fonction g.**

$x > \ 0$ donc $\frac{1-x}{x}$ a le même signe que $1 - x$.

x	0		1		+∞
Signe de $\frac{1-x}{x}$		+	0	−	

x	0		1		+∞
Signe de ln$x$		−	0	+	
Signe de -3ln$x$		+	0	−	

- $\frac{1-x}{x}$ et -3lnx sont positifs sur]0 ;1[donc par somme $-3lnx + \frac{-x+1}{x}$ >0 sur]0 ;1[
- $\frac{1-x}{x}$ et -3lnx sont négatifs sur]1 ;+∞[donc par somme $-3lnx + \frac{-x+1}{x}$ < 0 sur]1 ;+∞[

Donc

x	0		1		+∞
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
Variations de g	-∞	↗	2	↘	-∞

4. **On note Δ la droite d'équation $y = 2x$ .Tracez la dans le repère ci-dessus**

   a) **Résoudre dans]0;+∞[l'équation $(1-3x)lnx \ = \ 0$ et donner une interprétation graphique des solutions.**

$(1-3x)lnx \ = \ 0 \Leftrightarrow 1-3x \ = \ 0 \ ou \ lnx \ = \ 0$

$\Leftrightarrow x \ = \ \frac{1}{3} \ ou \ x \ = \ 1$.

$\frac{1}{3}$ et 1 sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et Δ.

   b) **Etudier la position de la courbe représentative de g par rapport à la droite Δ.**

Pour étudier la positon relative des deux courbes on étudie le signe de la différence :

$g(x)$ -2x =$(1-3x)lnx$; 1-3x = 0 ⇔ x = $\frac{1}{3}$

x	0		$\frac{1}{3}$		1		+∞
Signe de ln$x$		−	|	−	0	+	
Signe de 1-3x		+	0	−	|	−	
Signe de $g(x)$ − $2x$		−	0	+	0	−	

- Donc sur]0 ;$\frac{1}{3}$ [U]1 ;+∞[$g(x) - 2x < 0 \Leftrightarrow g(x) < 2x$ Donc C_f est au dessous de Δ.
- Donc sur] $\frac{1}{3}$;1[$g(x) - 2x > 0 \Leftrightarrow g(x) > 2x$ Donc C_f est au dessus de Δ.

Exercice n°4 :

***U* est la suite définie par u_0= e^2et, pour tout entier naturel n, u_{n+1}=$\sqrt{\mathrm{e}x u_n}$**

1. **Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$.**

Posons P_n : « $u_n > 0$ »

Initialisation

u_0= e^2 > 0 donc P_0 est vraie

Hérédité

On suppose que P_n est vraie pour un n$\geq$ 0, démontrons que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$

P_n est vraie ⇔ $u_n > 0$

⇔$ex\, u_n > 0$ car $e > 0$

⇔$\sqrt{ex\, u_n}$ > 0 car la fonction racine carrée est croissante sur [0 ;+∞[

⇔$u_{n+1} > 0$ donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire

Conclusion

- P_0 est vraie
- la propriété est héréditaire

  donc pour tout $n \geq 0, u_n > 0$

2. ***V* est la suite définie sur ℕ par $v_n = \ln u_n - 1$.**

a) **Montrer que *V* est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.**

v_{n+1} =ln$u_{n+1} - 1$ ⇔ v_{n+1} =ln$\sqrt{ex\, u_n} - 1$ ⇔ v_{n+1} =$\frac{1}{2}$ln $(ex\, u_n) - 1$ = $\frac{1}{2}$(ln (e) + ln(u_n)) -1

⇔v_{n+1} =$\frac{1}{2}$x1 + $\frac{1}{2}$ln$(u_n) - 1$ = $-\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ln(u_n) =$\frac{1}{2}$ (lnu_n -1) = $\frac{1}{2}v_n$

Donc la suite V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln u_0 - 1 = \ln e^2$ -1=2-1=1

b) **Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.**

Donc pour tout entier n, $v_n = (\frac{1}{2})^n$, donc lnu_n -1 = $(\frac{1}{2})^n$ ⇔ ln u_n = $(\frac{1}{2})^n + 1$ ⇔ u_n =$e^{(\frac{1}{2})^n+1}$

c) ***U* admet-elle une limite ?si oui laquelle ?**

$$\left.\begin{array}{l} -1<\frac{1}{2}<1 \text{ donc } \lim\limits_{n\to\infty+} (\frac{1}{2})^n=0 \text{ donc } \lim\limits_{n\to\infty+} (\frac{1}{2})^n+1=1 \\ \text{Or } \lim\limits_{x\to 1} e^x = e \end{array}\right\} \quad \lim_{n\to\infty+} u_n = e$$