Nom :
Prénom :

DS n°2
le 14/10/2019

Classe :
T S …

Capacités évaluées :	**Avis du professeur** Non acquis → Acquis
Utiliser la calculatrice pour émettre des conjectures.	
Démontrer par récurrence.	
Démontrer le sens de variations d'une suite.	
Justifier qu'une suite converge.	
Démontrer qu'une suite est arithmétique.	
Exprimer le terme général d'une suite en fonction de n.	
Déterminer la limite d'une suite.	
Calculer les premiers termes d'une suite définie par une relation de récurrence.	
Interpréter le résultat renvoyé par une fonction python.	
Démontrer que deux droites sont parallèles.	
Construire le point d'intersection d'une droite et d'un plan.	
Construire l'intersection de deux plans.	
Construire la section d'un cube par un plan. Rédiger le protocole de construction.	
Justifier la position relative de deux droites.	
Démontrer que deux plans sont parallèles.	
Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan.	

Exercice 1 (EC)	Exercice 2	Exercice 3 (EC)	Exercice 4	Exercice 5	Total
… / 5,5	… / 5	… / 1,5	… / 3	… / 5	… / 20

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : (EC) **… / 5,5**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et } u_{n+1} = \frac{3u_n}{3+2u_n}$$

1. A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on faire sur la limite et le sens de variation de (u_n) ?
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

   b) En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

   c) Montrer que la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

   b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

   c) Quelle est la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 2 : Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. **… / 5**

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - 5\,n - 2\,cos(n)$.
   Affirmation 1 : La suite (u_n) diverge vers -∞.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right)$

   On admet que cette suite est décroissante et minorée par 0.
   Affirmation 2 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{7}$.
3. La suite de Fibonacci est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   Affirmation 3 : $u_4 = 3$

4. On note, pour tout entier naturel n : $S_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

   Affirmation 4 : La suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

5. On considère la suite (S_n) définie précédemment et la fonction python ci-dessous.

```python
def seuil(A):
    n = 0
    S = 1
    while S <= A :
        n = n + 1
        S = S + (3/4)**n
    return n
```

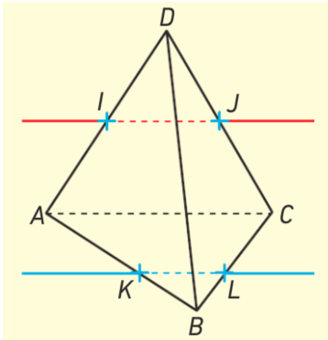
   Affirmation 5 : En tapant l'instruction seuil(3.999) cette fonction renvoie $n = 28$. C'est le plus grand entier n tel que $S_n \leq 3{,}999$.

Exercice 3 : (EC) **… / 1,5**

On considère un tétraèdre ABCD.
On note I le milieu de [AD] et J celui de [DC].
On note respectivement K et L les points de [AB] et [BC] tels que :

$$AK = \frac{2}{3}AB \quad \text{et } CL = \frac{2}{3}CB$$

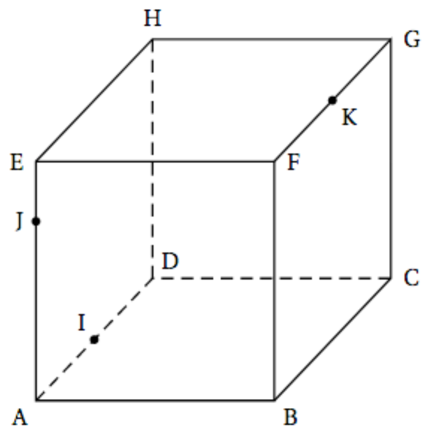
Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.



Exercice 4 : **… / 3**

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD].
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.
- K est le milieu du segment [FG].

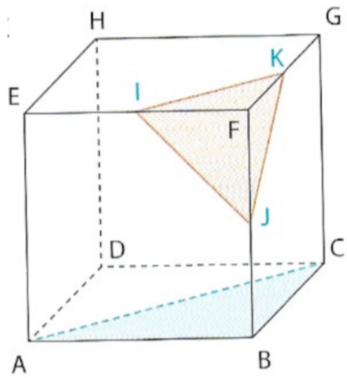


1. a) Sur la figure ci-contre, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH).
   Vous laisserez les traits de construction sur la figure.

   b) En déduire, en justifiant, l'intersection des plans (IJK) et (EFG).
2. Construire en couleur la section du cube par le plan (IJK) en rédigeant le protocole de construction.

Exercice 5 : **… / 5**

ABCDEFGH est un cube.
Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [EF], [FB] et [FG].



1. Quelle est la position relative des droites (IK) et (EA). Justifier.
2. a) Justifier que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes.

   b) Déterminer et construire l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

   c) On note (d) la droite d'intersection des plans (IJK) et (ABC).
   Montrer que (d) est parallèle à (IK).
3. Démontrer que les plans (IJK) et (BEG) sont parallèles.
4. Démontrer que (d) est parallèle à (BEG).

Correction du DS n°2

Exercices 1 et 3 : (EC) Voir les corrections des exercices du livre du n° 64 p 50 et n°3 p 89

Exercice 2 : Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - 5\,n - 2\,cos(n)$.
   Affirmation 1 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq cos(n) \leq 1$
$-2 < 0$. On en déduit, par produit membre à membre : $2 \geq -2\,cos(n) \geq -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq -2\,cos(n) \leq 2$
En additionnant $3 - 5n$ membre à membre on obtient :
$$-2 + 3 - 5n \leq 3 - 5\,n - 2\,cos(n) \leq 2 + 3 - 5n$$
$$1 - 5n \leq u_n \leq 5 - 5n$$
On a : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5 - 5n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 5 - 5n = -\infty$
On en déduit, d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
Ainsi, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$. L'affirmation 1 est vraie.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,(u_n + \dfrac{7}{u_n})$
   On admet que cette suite est décroissante et minorée par 0.
   Affirmation 2 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{7}$.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $L \geq 0$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ alors :

- D'une part : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2}\,(u_n + \dfrac{7}{u_n}) = \dfrac{1}{2}\,(L + \dfrac{7}{L})$
- D'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$ alors :

On en déduit que le réel L est solution de l'équation : $\dfrac{1}{2}\,(L + \dfrac{7}{L}) = L \quad \Leftrightarrow \quad L + \dfrac{7}{L} = 2L$
En multipliant chaque membre de l'équation par L ≥ 0 on obtient : $L^2 + 7 = 2L^2$
$$2L^2 - L^2 = 7$$
$$L^2 = 7$$
$$L = \sqrt{7} \text{ ou } L = -\sqrt{7}$$
L $\geq 0 \Rightarrow L = \sqrt{7}$
Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\sqrt{7}$. L'affirmation 2 est vraie.

3. La suite de Fibonacci est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   Affirmation 3 : $u_4 = 3$

$u_0 = u_1 = 1$
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
On en déduit : $u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2$
$u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$
$u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5 \neq 3$
L'affirmation 3 est fausse.

4. On note, pour tout entier naturel n : $S_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

   Affirmation 4 : La suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

$S_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{3}{4}$

Donc : $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4 \times (1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1})$

Or : $\frac{3}{4} \in]-1\,;1[$ donc : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$

On en déduit, par somme : $\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 1$ et par produit : $\lim_{n\to+\infty} 4 \times (1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}) = 4$

Ainsi, la suite $S_n$converge vers 4. L'affirmation 4 est fausse.

5. On considère la suite (S_n) définie précédemment et la fonction python ci-dessous.

```
def seuil(A):
    n = 0
    S = 1
    while S <= A :
        n = n + 1
        S = S + (3/4)**n
    return n
```

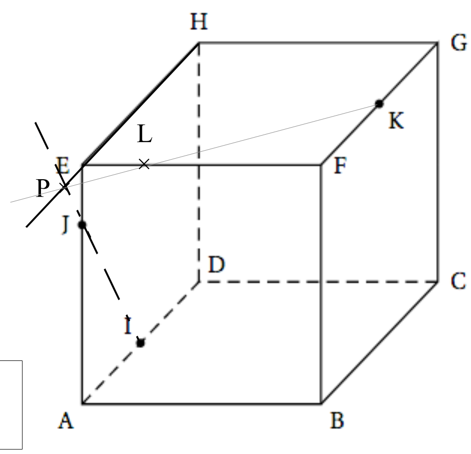
   Affirmation 5 : En tapant l'instruction seuil(3.999) cette fonction renvoie $n = 28$. C'est le plus grand entier n tel que $S_n \leq 3{,}999$.

La suite $S_n$converge vers 4.
En tapant l'instruction seuil(3.999), on rentre dans la boucle « while » tant que la condition $S_n \leq 3{,}999$ est vérifiée. La fonction renvoie donc la plus petite valeur de n telle que la somme S_n devient supérieure strictement à 3,999. L'affirmation 5 est fausse.

Exercice 4 :

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD].
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.
- K est le milieu du segment [FG].



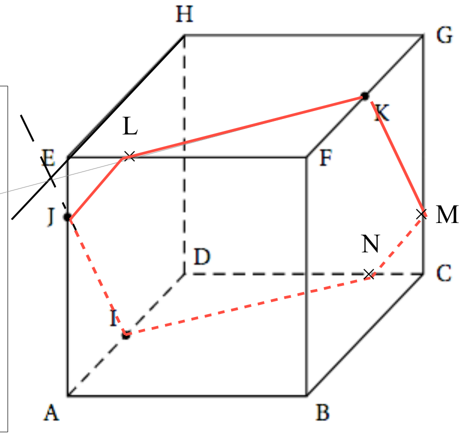
1. a) Sur la figure ci-contre, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH).
   Vous laisserez les traits de construction sur la figure.

Remarque : Le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) est le point d'intersection de la droite (IJ), incluse dans (IJK), et de (EH).

   b) En déduire, en justifiant, l'intersection des plans (IJK) et (EFG).

Le point P appartient à la droite (EH) qui est incluse dans le plan (EFG). De plus, P appartient au plan (IJK). On en déduit que P appartient à l'intersection des plans (IJK) et (EFG). Le point K étant le milieu de [FG], K appartient lui aussi à l'intersection des plans (IJK) et (EFG). L'intersection des plans (IJK) et (EFG) est donc la droite (PK).

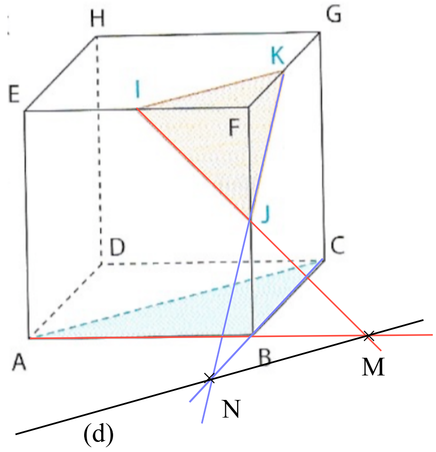
2. Construire en couleur la section du cube par le plan (IJK) en rédigeant le protocole de construction.



Les points I, J, K et L appartiennent à la section du cube par le plan (IJK)
Or, si deux plans sont parallèles et qu'un troisième plan coupe l'un alors il coupe l'autre selon des droites d'intersections parallèles.
Ainsi, le plan (IJK) coupe les plans (ADHE) et (BCDG) selon des droites parallèles dans le plan (IJK).
On trace la parallèle à (IJ) passant par K. Elle coupe l'arête [CG] en M.
On trace la parallèle à (JL) passant par M. Elle coupe l'arête [CD] en N.
Les points M et N appartiennent au plan (IJK).
Finalement, la section du cube par le plan (IJK) est l'hexagone IJLKMN.

<u>Exercice 5</u> :

ABCDEFGH est un cube.
Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [EF], [FB] et [FG].



1. Quelle est la position relative des droites (IK) et (EA). Justifier.

Les points I, E et A sont coplanaires dans le plan (ABFE).
K n'appartient pas à ce plan car K est le milieu de [FG].
On en déduit que les droites (IK) et (EA) ne sont pas coplanaires.

2. a) Justifier que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes.

Les droites (IJ) et (AB) sont coplanaires dans le plan (ABFE).
I étant le milieu de [EF] et J n'appartenant pas à (EF), les droites (IJ) et (AB) ne peuvent pas être parallèles. On en déduit qu'elles sont nécessairement sécantes.

b) Déterminer et construire l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

Les droites (IJ) et (AB) sont sécantes en un point M.
Ces droites étant respectivement incluses dans les plans (IJK) et (ABC) on en déduit que M appartient à l'intersection de ces deux plans.
De même les droites (JK) et (BC) sont sécantes en un point N qui appartient aux plans (IJK) et (ABC).
On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite (MN).

c) On note (d) la droite d'intersection des plans (IJK) et (ABC). Montrer que (d) est parallèle à (IK).

ABCDEFGH est un cube donc les plans (EFGH) et (ABCD) sont strictement parallèles. Le plan (IJK) coupe ces deux plans selon les droites (IK) et (d).
Or, si deux plans sont parallèles et qu'un troisième plan coupe l'un alors il coupe l'autre selon des droites d'intersections parallèles.
On en déduit que (d) est parallèle à (IK).

3. Démontrer que les plans (IJK) et (BEG) sont parallèles.

Le plan (IJK) est défini par les droites sécantes (IJ) et (JK).
Le plan (BEG) est défini par les droites sécantes (BE) et (BG).
Dans le triangle EFB, les points I et J sont les milieux respectifs de [EF] et [BF].
On en déduit, d'après le théorème des milieux, que les droites (IJ) et (BE) sont parallèles.
De même, dans le triangle FBG, les droites (JK) et (BG) sont parallèles.
Or, si un plan contient deux droites sécantes, respectivement parallèles à deux droites sécantes dans un autre plan alors ces deux plans sont parallèles.
Ainsi, les plans (IJK) et (BEG) sont parallèles.

4. Démontrer que (d) est parallèle à (BEG).

La droite (d) est parallèle à la droite (IK), elle même parallèle à la droite (EG). Donc (d) est parallèle à (EG).
De plus, la droite (EG) est incluse dans le plan (BEG).
Or si une droite (d_1) est parallèle à une autre (d_2) incluse dans un plan $\mathscr{P}$ alors (d_1) est parallèle à $\mathscr{P}$.
On en déduit que la droite (d) est parallèle au plan (BEG).