Nom : **DS n°4** *Classe* :
Prénom : le 16/12/2019 T S …

Capacités évaluées :	Avis du professeur Non acquis → Acquis
Réussir convenablement des exercices travaillés en classe.	
Déterminer des limites.	
Dériver.	
Etudier les variations d'une fonction.	
Justifier qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle et arrondir cette solution.	
Construire la courbe représentative d'une fonction et ses asymptotes dans un repère orthonormé.	
Construire les premiers termes d'une suite définie par récurrence dans un repère orthonormé.	
Conjecturer le comportement d'une suite.	
Démontrer par récurrence.	
Justifier qu'une suite est convergente / Déterminer la limite d'une suite.	

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : (EC) **… / 5,5**

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$:

   a) $f(x) = \sqrt{5-3x}$ b) $g(x) = (3x^2 - 4x + 2)^{-5}$ c) $h(x) = \frac{-2}{2x+3}$

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction définie par $g(x) = (3x^2 - 4x + 2)^{-5}$

3. Etudier les variations de la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{(2-8x)^3}$ sur l'intervalle $]\frac{1}{4}\,;+\infty[$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-5x+10}{x-2}$.

   a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

   b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}f$ en $+\infty$.

   c) Justifier les positions relatives de Δ et $\mathscr{C}f$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Exercice 2 : **… / 8,5**

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 1$.

   a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Dresser le tableau de variations de g.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et en donner une valeur approchée à $0,01$ près.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

   a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les asymptotes éventuelles.

   b) Démontrer que pour tout réel x distinct de -1 on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$.

   c) De la question 1.c déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

   d) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   e) Construire la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes dans un repère orthonormé.

Exercice 3 : Téléviseurs à écran plat. **… / 6**

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année. Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année $2005 + n$. On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n \left(20 - u_n\right)$$

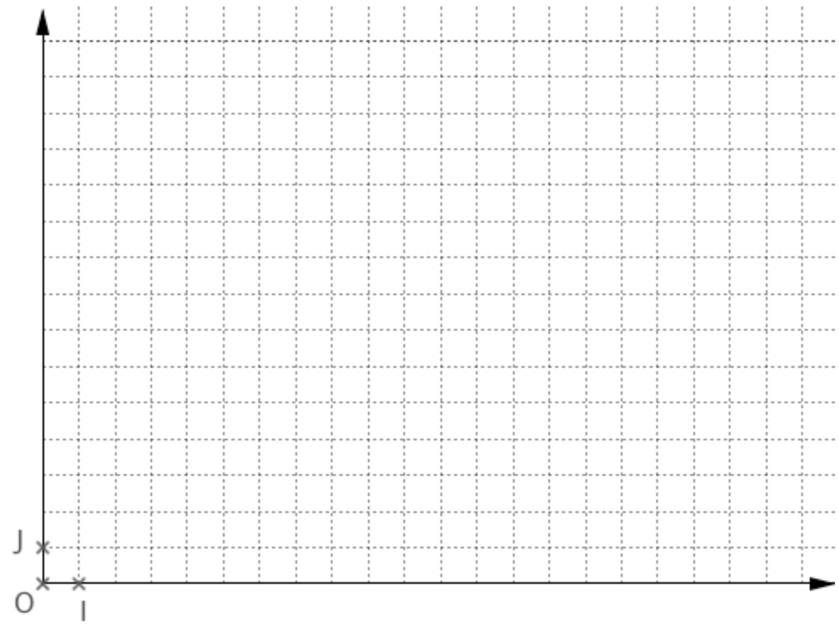
Soit f la fonction définie sur $[\,0\ ;\ 20\,]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{10} x \left(20 - x\right)$$

1. a) Etudier les variations de f sur $[\,0\ ;\ 20\,]$.

   b) En déduire que pour tout réel x de $[\,0\ ;\ 20\,]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\,0\ ;\ 10\,]$.

2. a) Tracer dans le repère orthonormé ci-dessous l'arc de parabole représentant f sur $[\,0\ ;\ 20\,]$ et la droite Δ d'équation $y = x$ puis construction les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.



   b) Quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

<u>**Correction du DS n°3**</u>

Exercice 1 : (EC) Voir les corrections des exercices n°2, 4, 5 et 11 du cours.

Exercice 2 :

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 1$.

   a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

La limite en l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,x^3 - 3\,x^2 - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\,x^3 = -\infty$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\,x^3 - 3\,x^2 - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\,x^3 = +\infty$

   b) Dresser le tableau de variations de g.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 1$
En tant que fonction polynôme, g est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2 \times 3\,x^2 - 3 \times 2\,x = 6\,x^2 - 6\,x = 6\,x\,(x-1)$
$g'(x) = 0 \iff 6\,x\,(x-1) = 0 \iff 6\,x = 0$ ou $x - 1 = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$
De plus, $g'(x) = 6\,x^2 - 6\,x$ est du signe de $a = 6$ sauf entre ses racines.
On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

$g(0) = 2 \times 0^3 - 3 \times 0^2 - 1 = -1$
$g(1) = 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et en donner une valeur approchée à $0,01$ près.

On sait que la fonction g est strictement négative sur $]-\infty\,;1]$. On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle. De plus, sur $[1\,;+\infty[$:

- g est continue et strictement croissante.
- $\forall\, x \in [1\,;+\infty[$, $g(x) \in [-2\,;+\infty[$
- $0 \in [-2\,;+\infty[$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle et par conséquent sur $\mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme de balayage (par exemple), on obtient $\alpha \approx 1,68$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$.

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

   a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les asymptotes éventuelles.

- Etude des limites en $-\infty$ et en $+\infty$:

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient du terme de plus haut degré de son numérateur par celui de son dénominateur.
Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0^-$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0^-$
On en déduit que l'axe des abscisses (la droite d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Etude des limites à gauche et à droite de -1 :

$x^3 + 1 > 0 \iff x^3 > 0 \iff x^3 > -1 \iff x > -1$ On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^3 + 1 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^3 + 1 = 0^+$
De plus : $\lim\limits_{x\to-1} 1 - x = 1 - (-1) = 2$
On en déduit, par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{1-x}{x^3+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{1-x}{x^3+1} = +\infty$
Ainsi, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

b) Démontrer que pour tout réel x distinct de -1 on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$.

$\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{-}1\}$, $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1-x$ et $v(x) = x^3+1$

Donc : $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{\text{-}1\,(x^3+1) - 3x^2\,(1-x)}{(x^3+1)^2} = \dfrac{\text{-}x^3 - 1 - 3x^2 + 3x^3}{(x^3+1)^2}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{2\,x^3 - 3\,x^2 - 1}{(x^3+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

c) De la question 1.c déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{\text{-}1\}$.

A la question 1.c on a justifié que $\alpha \approx 1,68$ était l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
Le tableau de variation de g permet d'en déduire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$+$	

Or : $\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{-}1\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ et $(x^3+1)^2 > 0$

On en déduit que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	0^-	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0^-

Avec $f(\alpha) \approx f(1,68) \approx \text{-}0,12$

d) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

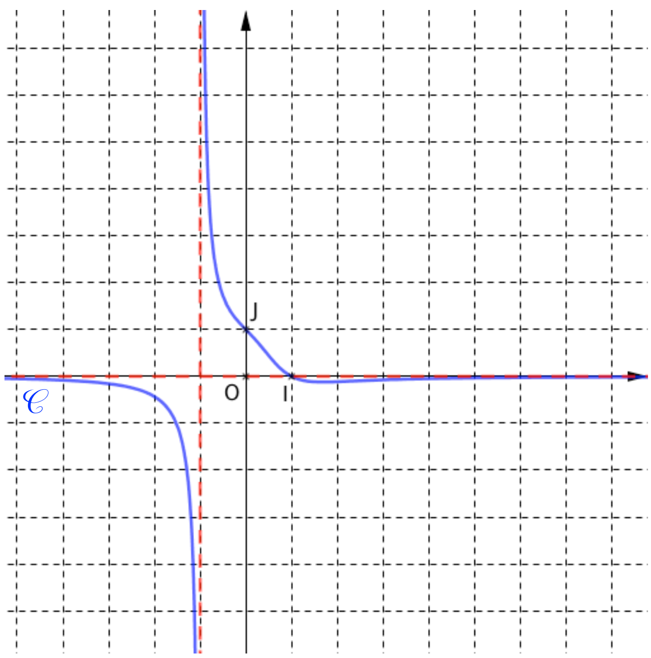
La tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$

Or : $f'(0) = \dfrac{2 \times 0^3 - 3 \times 0^2 - 1}{(0^3+1)^2} = \dfrac{\text{-}1}{1^2} = \text{-}1$

Et : $f(0) = \dfrac{1-0}{0^3+1} = \dfrac{1}{1} = 1$

On en déduit l'équation : $y = \text{-}1\,(x-0) + 1 \;\Leftrightarrow\; y = \text{-}\,x + 1$

e) Construire la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes dans un repère orthonormé.



Exercice 3 : Téléviseurs à écran plat.

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année. Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année $2005 + n$. On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n \left(20 - u_n\right)$$

Soit f la fonction définie sur $[\,0\ ;\ 20\,]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{10} x\,(20 - x)$$

1. a) Etudier les variations de f sur $[\,0\ ;\ 20\,]$.

$\forall\ x \in [\,0\ ;\ 20\,]$, $f(x) = \dfrac{1}{10} x\,(20 - x) = \dfrac{20}{10}\,x - \dfrac{1}{10}\,x^2 = 2\,x - 0,1\,x^2$

Donc $f'(x) = 2 - 0,2\,x$

$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2 - 0,2\,x > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2 > 0,2\,x \quad\Leftrightarrow\quad x < \dfrac{2}{0,2} \quad\Leftrightarrow\quad x < 10$

$f(0) = \dfrac{1}{10} \times 0\,(20 - 0) = 0 \times 20 = 0$

$f(10) = \dfrac{1}{10} \times 10\,(20 - 10) = 1 \times 10 = 10$

$f(20) = \dfrac{1}{10} \times 20\,(20 - 20) = 2 \times 0 = 0$

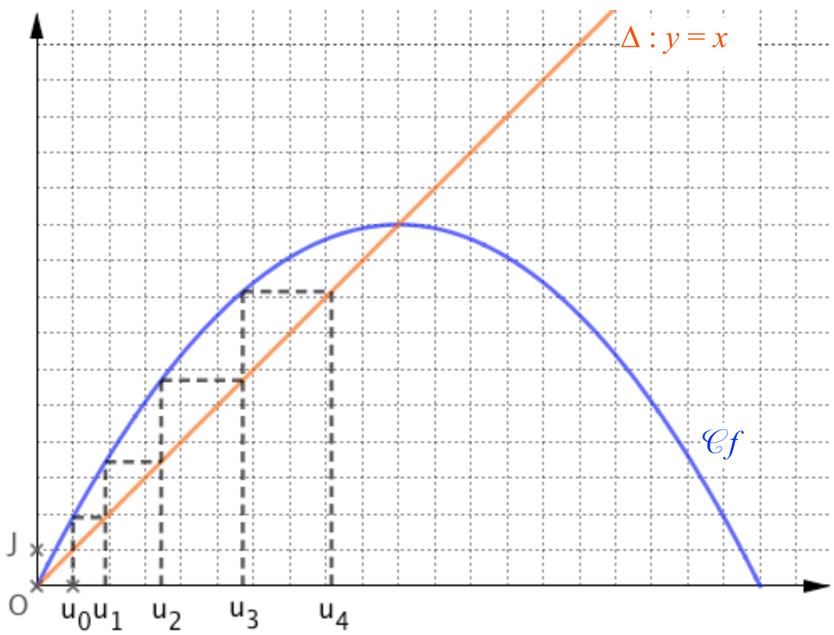
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		10		20
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

b) En déduire que pour tout réel x de $[\,0\ ;\ 20\,]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\,0\ ;\ 10\,]$.

Le minimum de f sur $[\,0\ ;\ 20\,]$ est 0 tandis que le maximum est 10.
On en déduit : $\forall\ x \in [\,0\ ;\ 20\,]$, $f(x) \in [\,0\ ;\ 10\,]$

2. a) Tracer dans le repère orthonormé ci-dessous l'arc de parabole représentant f sur $[\,0\ ;\ 20\,]$ et la droite Δ d'équation $y = x$ puis construction les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.



b) Quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

En observant la construction précédente, il semblerait que (u_n) soit croissante et qu'elle converge vers 10.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- Initialisation : Si $n = 0$
  On a : $u_0 = 1$
  Et $u_1 = \frac{1}{10} u_0 (20 - u_0) = \frac{1}{10}(20 - 1) = \frac{19}{10} = 1,9$
  Ainsi : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit k un entier naturel. $k \geq 0$.
  Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors : $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 10$
  On a démontré à la question précédente que la fonction f était strictement croissante sur $[0\,;10]$.
  On en déduit : $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(10)$
  Or : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n) = f(u_n)$
  Donc : $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 10$
  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
  $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$
Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 10.
On en déduit qu'elle converge vers un réel $L \leq 10$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ alors :

- D'une part : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$
- D'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{10} u_n (20 - u_n) = \frac{1}{10} L (20 - L)$

On en déduit que L est solution de l'équation : $\frac{1}{10} L (20 - L) = L$ qui équivaut successivement à :

$L(20 - L) = 10\,L$
$20\,L - L^2 = 10\,L$
$L^2 - 10\,L = 0$
$L(L - 10) = 0$
$L = 0$ ou $L - 10 = 0$
$L = 0$ ou $L = 10$

La suite (u_n) étant croissante à partir de $u_0 = 1$, on en déduit que sa seule limite possible est $L = 10$.