Nom : **DS n°3** Le : 10/12/2020 Durée : 1h

Groupe : 1MATHS1 Probabilités conditionnelles Note : … / 16

	Evaluation des capacités
Je sais :	Non → Oui
Justifier une probabilité	
Modéliser une situation à l'aide d'un arbre pondéré	
Calculer des probabilités	
Expliciter des probabilités par des phrases contextualisées	
Donner un résultat sous forme fractionnaire irréductible ou en arrondissant à la précision demandée	
Déterminer si deux événements sont indépendants	
Communiquer à l'écrit. Rédiger sa réponse en exposant son raisonnement	
Prendre les initiatives nécessaires pour résoudre un problème	

Exercice 1 : **… / 5**

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.

L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour. Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.

On choisit un enfant au hasard parmi ceux des écoles primaires de la ville et on considère les événements :

- B : « L'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »
- S : « L'enfant est en surpoids »

1. Justifier que $P_B(S) = 0,125$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer $P(B \cap S)$ puis interpréter le résultat obtenu.
4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.
5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ? On arrondira le résultat au millième.
6. Les événements B et S sont-ils indépendants ?

Exercice 2 : **… / 5**

Un restaurant propose à sa carte deux desserts différents :

- le premier dessert est un assortiment de macarons et est choisi par 40 % des clients,
- le second dessert est une part de tarte et est choisie par 30 % des clients.

Les autres clients ne prennent pas de dessert. Aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que 70 % des clients qui ont pris un assortiment de macarons commandent ensuite un café, 40 % de ceux qui ont pris une part de tarte demandent par la suite un café et 90 % de ceux qui ne prennent pas de dessert terminent leur repas par un café. On interroge au hasard un client et on note :

- M : « Le client prend un assortiment de macarons. »
- T : « Le client prend une part de tarte. »
- N : « Le client ne prend pas de dessert. »
- C : « Le client prend un café. »

1. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Définir par une phrase les probabilités $P(T \cap C)$ et $P_M(C)$ (on ne demande pas de les calculer).
3. Calculer $P(T \cap C)$ puis $P(C)$.
4. On rencontre un client ayant pris un café. Quelle est la probabilité qu'il ait commandé une part de tarte ?

   On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 3 : Raisonner / Communiquer (à l'écrit). **… / 3**

On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On considère les événements suivants :

- A : « Le nombre obtenu est pair »
- B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 »

Les événements A et B sont ils indépendants ?

Exercice 4 : Prendre des initiatives / Raisonner / Communiquer **… / 3**

Une urne contient initialement trois boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule de l'urne.

- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note A l'événement : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $P(A) = \frac{3}{4}$?

Correction du DS n°3

Exercice 1 :

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.

L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour. Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.

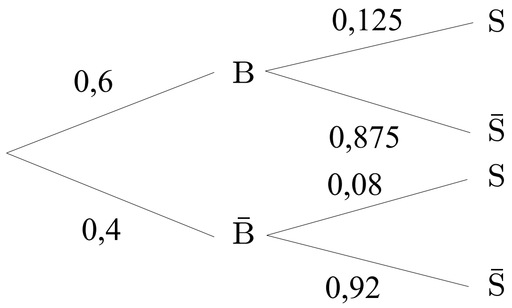
On choisit un enfant au hasard parmi ceux des écoles primaires de la ville et on considère les événements :

- B : « L'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »
- S : « L'enfant est en surpoids »

1. Justifier que $P_B(S) = 0,125$.

Parmi les enfants qui boivent une boisson sucrée ou plus par jour, 1 enfant sur 8 est en surpoids.
Donc $P_B(S) = \frac{1}{8} = 0,125$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.



3. Calculer $P(B \cap S)$ puis interpréter le résultat obtenu.

$P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0,6 \times 0,125 = 0,075$
La probabilité de choisir au hasard un enfant qui boit au moins une boisson sucrée par jour et qui est en surpoids est égale à $0,075$.

4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.

$P(S) = P(B \cap S) + P(\bar{B} \cap S) = 0,075 + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(S) = 0,075 + 0,4 \times 0,08 = 0,107$
La probabilité de choisir au hasard un enfant en surpoids est égale à $0,107$.

5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ? On arrondira le résultat au millième.

$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,075}{0,107} \approx 0,701$
La probabilité de choisir un enfant qui boit au moins une boisson sucrée par jour, sachant qu'il est en surpoids, est environ égale à $0,701$.

6. Les événements B et S sont-ils indépendants ?

$P(S) = 0,107 \neq 0,125$
Donc $P(S) \neq P_B(S)$
On en déduit que les événements B et S ne sont pas indépendants

Exercice 2 :

Un restaurant propose à sa carte deux desserts différents :

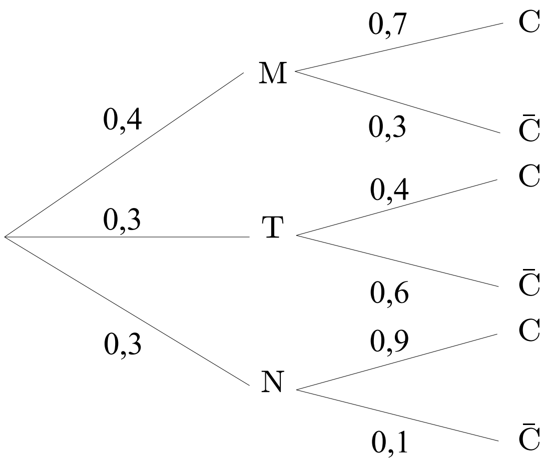
- le premier dessert est un assortiment de macarons et est choisi par 40 % des clients,
- le second dessert est une part de tarte et est choisie par 30 % des clients.

Les autres clients ne prennent pas de dessert. Aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que 70 % des clients qui ont pris un assortiment de macarons commandent ensuite un café, 40 % de ceux qui ont pris une part de tarte demandent par la suite un café et 90 % de ceux qui ne prennent pas de dessert terminent leur repas par un café. On interroge au hasard un client et on note :

- M : « Le client prend un assortiment de macarons. »
- T : « Le client prend une part de tarte. »
- N : « Le client ne prend pas de dessert. »
- C : « Le client prend un café. »

1. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation.



2. Définir par une phrase les probabilités $P(T \cap C)$ et $P_M(C)$ (on ne demande pas de les calculer).

$P(T \cap C)$ est la probabilité qu'un client interrogé au hasard commande une tarte et un café.

$P_M(C)$ est la probabilité qu'un client commande un café, sachant qu'il a déjà pris un assortiment de macarons .

3. Calculer $P(T \cap C)$ puis $P(C)$.

$P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$

$P(C) = P(T \cap C) + P(M \cap C) + P(N \cap C) = 0,12 + 0,4 \times 0,7 + 0,3 \times 0,9 = 0,12 + 0,28 + 0,27 = 0,67$

4. On rencontre un client ayant pris un café. Quelle est la probabilité qu'il ait commandé une part de tarte ?

   On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$P_C(T) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{0,12}{0,67} = \frac{12}{67}$$

La probabilité qu'un client ait commandé une part de tarte, sachant qu'il a pris un café, est égale à $\frac{12}{67}$.

Exercice 3 : Raisonner / Communiquer (à l'écrit).

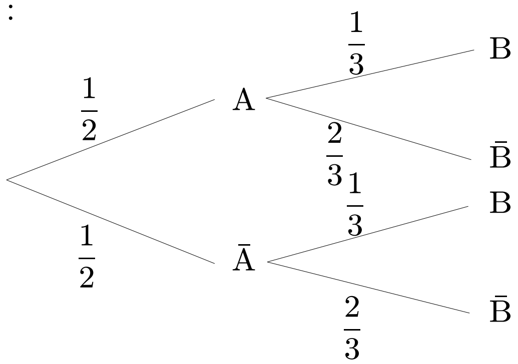
On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On considère les événements suivants :

- A : « Le nombre obtenu est pair »
- B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 »

Les événements A et B sont ils indépendants ?

Dans l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, il y a autant d'issues paires que d'issues impaires.
Dans le sous-ensemble $\{2 ; 4 ; 6\}$ des issues paires, seul 6 est un multiple de 3.
De même, dans le sous-ensemble $\{1 ; 3 ; 5\}$, seul 3 est un multiple de 3.
On en déduit l'arbre pondéré suivant :



Comparons $P_A(B) = \frac{1}{3}$ avec $P(B)$:

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$P(B) = P_A(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

Exercice 4 : Prendre des initiatives / Raisonner / Communiquer

Une urne contient initialement trois boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule de l'urne.

- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

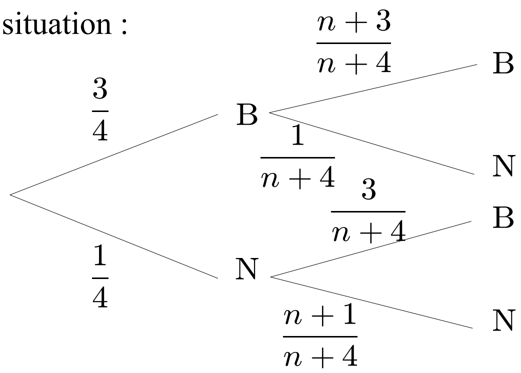
On note A l'événement : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $P(A) = \frac{3}{4}$?

Initialement, l'urne contient 4 boules (3 blanches et 1 noire) indiscernables au toucher.
On en tire une et, quelle que soit la couleur obtenue, on la remet dans l'urne ainsi que n boules supplémentaires.
Au moment du 2nd tirage, l'urne contient donc $n + 4$ boules.
Si lors du 1er tirage on obtient une boule blanche il y en aura n de plus au moment du 2nd tirage. Le nombre de boules noires ne change pas. Inversement, si l'on obtient une boule noire au moment du 1er tirage c'est le nombre de boules blanches qui ne change pas au moment du 2nd tirage et on ajoute n boules noires.
A chaque tirage, on note :

- B : « Obtenir une boule blanche »
- N : « Obtenir une boule noire »

L'arbre pondéré suivant modélise la situation :



A est l'événement : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

$P(A) = P(B\cap B) + P(N\cap N) = \frac{3}{4} \times \frac{n+3}{n+4} + \frac{1}{4} \times \frac{n+1}{n+4} = \frac{3n+9}{4n+16} + \frac{n+1}{4n+16} = \frac{4n+10}{4n+16}$

$P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{4n+10}{4n+16} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(4n+10) = 3(4n+16) \Leftrightarrow 16n + 40 = 12n + 48$

$P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16n - 12n = 48 - 40 \Leftrightarrow 4n = 8 \Leftrightarrow n = 2$

Ainsi, si $n = 2$ alors la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est égale à $\frac{3}{4}$.