Nom :……………………………………Prénom : ……………………………… **DS n°6** **T.S.**

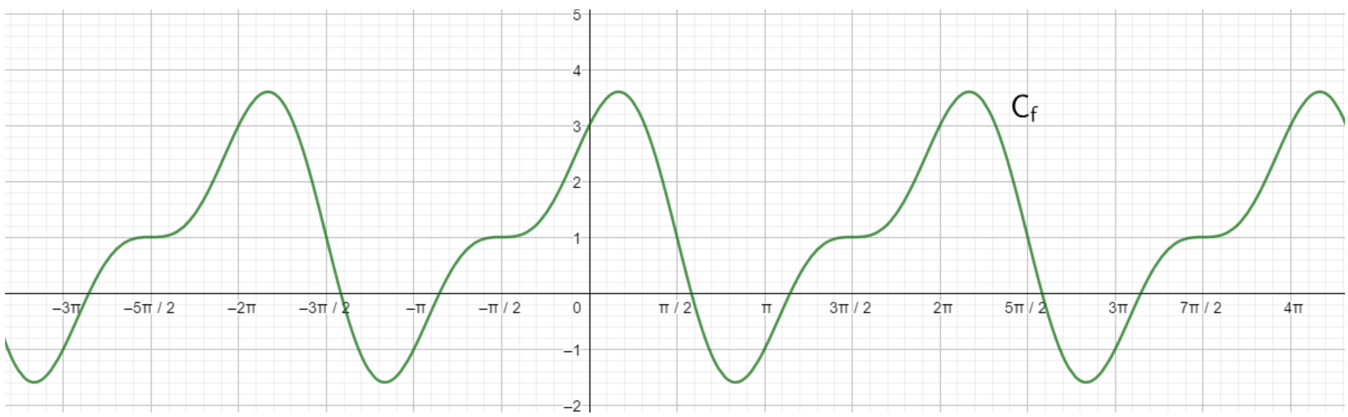
Capacités évaluées :	***Avis du professeur*** ***Non acquis***	***En cours d'acquisition***	***Acquis***
Fonction trigonométrique:			
Etudier la parité d'une fonction			
Etudier la périodicité d'une fonction			
Calculer une dérivée			
Etudier le signe d'une expression			
Justifier l'existence d'une solution à une équation $f(x) = k$			
Encadrer les solutions d'une équation à une précision donnée			
Déterminer une limite			
Nombres complexes			
Résoudre une équation du second degré dans C			
Calculer la forme algébrique d'un nombre complexe			
Démontrer l'alignement de points			
Calculer le module d'un nombre complexe			
Déterminer des ensembles de points			
Compétences			
Calculer			
Démontrer			
Raisonner			

Ex 1	**Ex 2**	**Ex 3**	**TOTAL**
/7	**/7**	**/6**	**/20**

Exercice °1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + sin(2x) + 2\cos(x)$

1. La courbe représentative C_f de la fonction f est donnée ci-dessous :



a) La fonction semble-t-elle paire ? Impaire ? Justifier graphiquement puis par des calculs.

b) La fonction est périodique. Faire apparaître sur le graphique le motif qui se répète puis justifier, par un calcul, la valeur T de la période.

c) Justifier que l'on peut étudier f sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$.

2. a) Démontrer que pour tout réel x de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$, $f'(x) = -2(sin(x) + 1)(2sin(x) - 1)$.

b) Déterminer le tableau de variation de f sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$.

3. a) Prouvez que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions α et β dans $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$, avec $\alpha < \beta$

b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune de ces solutions.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.Le but de l'exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes $1, z^2 et \frac{1}{z}$ sont alignés. Sur le graphique fourni ci-dessous, le point A a pour affixe 1.

Partie A :

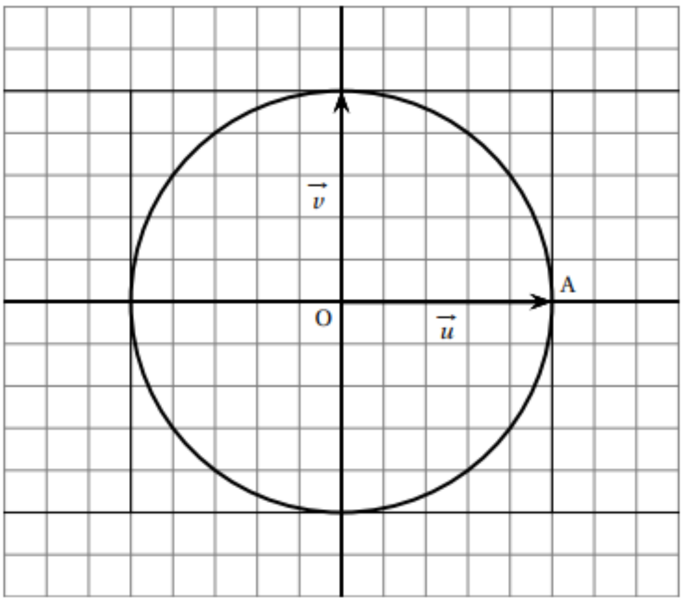
1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2+z+1=0$
2. Dans cette question, on pose $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   a) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.
   b) Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique ci-dessous.
   c) Démontrer que les points $A, N_2 et\ P_2$ sont alignés.

Partie B :

Soit z un nombre complexe non nul. On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

1. Etablir que, pour tout nombre complexe z, différent de 0, on a :
$$z^2-\frac{1}{z}=(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right)$$
2. En déduire que, pour tout nombre complexe $z\neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si z^2+z+1 est un réel.
   On rappelle que si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$, les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $z_{\vec{V}}=kz_{\vec{U}}$.

3. On pose $z=x+iy$ où $x\ et\ y$ désignent des nombres réels.
   Justifier que : $z^2+z+1=x^2-y^2+x+1+i(2xy+y)$
4.
   a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z\neq 0$ tels que les points $A, N\ et\ P$ soient alignés.
   b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné.



<u>Exercice n°3</u> :

Partie A : **QCM**

Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O

1. Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

   a) 3 **b)** i **c)** $3 + i$

2. z est un nombre complexe, $|z + i|$ est égal à :

   a) $|z| + 1$ **b)** $|\mathrm{z} - 1|$ **c)** $|i\bar{z} + 1|$

3. A et B sont deux points d'affixes respectives i et -1.
   L'ensemble des points M d'affixes z telle que $|z - i| = |z + 1|$ est :
   a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre [AB] **c)** La droite perpendiculaire à [AB] passant par O.

Partie B : *Répondre aux questions suivantes en justifiant les résultats. Les 3 questions sont indépendantes.*

Question 1 : Ω est le point d'affixe $1 - i$ .Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|\mathrm{z} - 1 + \mathrm{i}| = |3 - 4i|$.

Question 2 : Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z, $z \neq 1 + i$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-3i}{z-1-i}$.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que z' soit un imaginaire pur.

Question 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = 2x - sin(x)$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$

Correction du DS n°6

Exercice 1 :

1. a) Justifications graphiques :
La courbe représentative $\mathscr{C}f$ n'étant pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, la fonction f n'est pas paire. De plus, $\mathscr{C}f$ n'étant pas symétrique par rapport à l'origine du repère, la fonction f n'est pas impaire.
Justifications algébriques :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = 1 + sin(2 \times (-x)) + 2\,cos(-x)$
$f(-x) = 1 + sin(-2\,x) + 2\,cos(-x)$
Les fonctions sinus et cosinus étant respectivement impaire et paire, on en déduit :
$f(-x) = 1 - sin(2\,x) + 2\,cos(x)$
Or $f(x) = 1 + sin(2\,x) + 2\,cos(x)$
Puisque $f(-x) \neq f(x)$ alors la fonction f n'est pas paire.
Puisque $f(-x) \neq -f(x)$ alors la fonction f n'est pas impaire.

b) On peut conjecturer, graphiquement, que la fonction f est $2\,\pi$ - périodique.
Justification algébrique :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $x + 2\,\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x + 2\,\pi) = 1 + sin(2 \times (x + 2\,\pi)) + 2\,cos(x + 2\,\pi)$
$f(x + 2\,\pi) = 1 + sin(2\,x + 4\,\pi) + 2\,cos(x + 2\,\pi)$
Les fonctions sinus et cosinus étant chacune $2\,\pi$ - périodique, on en déduit :
$f(x + 2\,\pi) = 1 + sin(2\,x) + 2\,cos(x) = f(x)$
Ce qui prouve que f est $2\,\pi$ - périodique.

c) f étant $2\,\pi$ - périodique, on peut se limiter à l'étude de f sur tout intervalle d'amplitude $2\,\pi$.
Or : $-\dfrac{\pi}{2} + 2\,\pi = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4\,\pi}{2} = \dfrac{3\,\pi}{2}$
On peut donc se limiter à l'étude de f sur l'intervalle $[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\,\pi}{2}]$.

2. a) $\forall\ x \in [-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\,\pi}{2}]$, $f(x) = 1 + sin(2\,x) + 2\,cos(x)$
$f(x) = 1 + sin(a\,x + b) + 2\,cos(c\,x + d)$ avec $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$
On en déduit : $f'(x) = a\,cos(a\,x + b) - 2\,c\,sin(c\,x + d)$
$f'(x) = 2\,cos(2\,x) - 2\,sin(x)$

On pose : $A = f'(x) = 2\,cos(2\,x) - 2\,sin(x)$
D'après la formule de duplication de cosinus, on a : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $cos(2\,x) = cos^2(x) - sin^2(x)$
On en déduit : $A = 2\,(cos^2(x) - sin^2(x)) - 2\,sin(x)$
$A = 2\,cos^2(x) - 2\,sin^2(x) - 2\,sin(x)$
Or : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $cos^2(x) + sin^2(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$
On en déduit : $A = 2\,(1 - sin^2(x)) - 2\,sin^2(x) - 2\,sin(x)$
$A = 2 - 2\,sin^2(x) - 2\,sin^2(x) - 2\,sin(x)$
$A = -4\,sin^2(x) - 2\,sin(x) + 2$

On pose : $B = -2\,(sin(x) + 1)(2\,sin(x) - 1) = (-2\,sin(x) - 2)(2\,sin(x) - 1)$ et on développe.
$B = -4\,sin^2(x) + 2\,sin(x) - 4\,sin(x) + 2$
$B = -4\,sin^2(x) - 2\,sin(x) + 2$

Finalement : $\forall\ x \in [-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\,\pi}{2}]$, $f'(x) = -2\,(sin(x) + 1)(2\,sin(x) - 1)$

b) $\forall\ x \in [-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\,\pi}{2}]$, $f'(x) = -2\,(sin(x) + 1)(2\,sin(x) - 1)$
Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
On en déduit : $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; sin(x) + 1 = 0$ ou $2\,sin(x) - 1 = 0$
$sin(x) = -1$ ou $sin(x) = \dfrac{1}{2}$
Sur $[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\,\pi}{2}]$, $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\,\pi}{6}$

<u>Etude du signe de $f'(x)$</u> :

$\forall\ x \in [-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\,\pi}{2}]$, $-1 \leq sin(x) \leq 1$ on en déduit : $sin(x)+1 \geq 0$

De plus :

$\forall\ x \in [-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{6}]$, on a :

$sin(x) \leq \frac{1}{2}$

$2\,sin(x) \leq 1$

$2\,sin(x) - 1 \leq 0$

$\forall\ x \in [\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\,\pi}{6}]$, on a :

$sin(x) \geq \frac{1}{2}$

$2\,sin(x) \geq 1$

$2\,sin(x) - 1 \geq 0$

$\forall\ x \in [\frac{5\,\pi}{6}\ ;\ \frac{3\,\pi}{2}]$, on a :

$sin(x) \leq \frac{1}{2}$

$2\,sin(x) \leq 1$

$2\,sin(x) - 1 \leq 0$

On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et les variations de f :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\,\pi}{6}$		π		$\frac{3\,\pi}{2}$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$sin(x)+1$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$2\,sin(x)-1$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$			1

Puisque $f'(x)$ s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{5\,\pi}{6}$, on en déduit que M et m sont respectivement un maximum local et un minimum local.

M = $f(\frac{\pi}{6}) = 1 + sin(2 \times \frac{\pi}{6}) + 2\,cos(\frac{\pi}{6}) = 1 + sin(\frac{\pi}{3}) + 2\,cos(\frac{\pi}{6})$

M $= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{2+3\sqrt{3}}{2}$

m = $f(\frac{5\,\pi}{6}) = 1 + sin(2 \times \frac{5\,\pi}{6}) + 2\,cos(\frac{5\,\pi}{6}) = 1 + sin(\frac{5\,\pi}{3}) + 2\,cos(\frac{5\,\pi}{6})$

m $= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-3\sqrt{3}}{2}$

3. a) L'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{6}]$ car, sur cet intervalle, $f(x) \geq 1$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\,\pi}{6}]$.

Sur cet intervalle, on a : $f(x) \in [\frac{2-3\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{2+3\sqrt{3}}{2}]$.

Or : $\frac{2-3\sqrt{3}}{2} \approx -1,6 < 0$ et $\frac{2+3\sqrt{3}}{2} \approx 3,6 > 0$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\,\pi}{6}]$.

De même, puisque :

- f est continue et strictement croissante sur $[\frac{5\,\pi}{6}\ ;\ \frac{3\,\pi}{2}]$.
- $\forall\ x \in [\frac{5\,\pi}{6}\ ;\ \frac{3\,\pi}{2}]$, $f(x) \in [\frac{2-3\sqrt{3}}{2}\ ;1]$
- $0 \in [\frac{2-3\sqrt{3}}{2}\ ;1]$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[\frac{5\,\pi}{6}\ ;\ \frac{3\,\pi}{2}]$.

b) A l'aide de la calculatrice, on obtient : $1,8 < \alpha < 1,9$ et $3,5 < \beta < 3,6$

Exercice 2 :

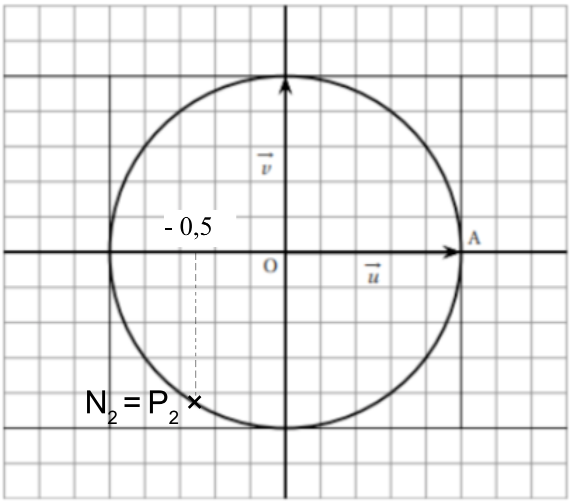
Partie A

1. On résout $z^2 + z + 1 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$
On en déduit deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et : $z_2 = \bar{z_1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

2. On pose $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
a) $z^2 = (-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = \dfrac{1}{4} - 2 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}i + \dfrac{3}{4}i^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

b) <u>Remarque</u> : Les points N_2 et P_2, de même affixe $(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$, sont confondus.
Ils sont sur le cercle trigonométrique puisque $\left| -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$



c) Les points N_2 et P_2 étant confondus, les vecteurs $\overrightarrow{AN_2}$ et $\overrightarrow{AP_2}$ sont égaux et par conséquent colinéaires. On en déduit que les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

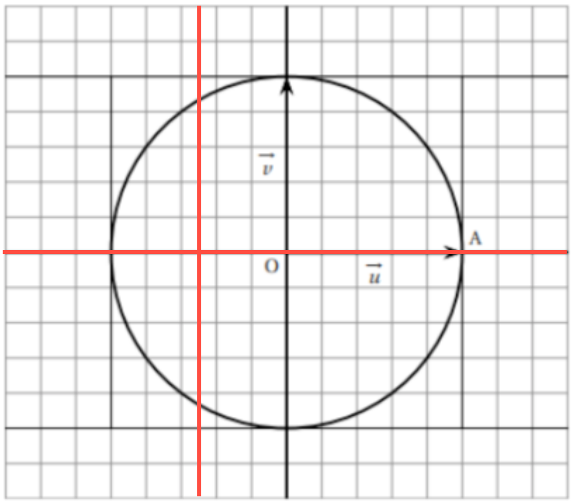
1. $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$: $(z^2 + z + 1)(1 - \dfrac{1}{z}) = z^2 + z + 1 - z - 1 - \dfrac{1}{z} = z^2 - \dfrac{1}{z}$

2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et les points $A(1)$, $N(z^2)$ et $P(\dfrac{1}{z})$.
Les points A, N et P sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires.
Or : $z_{\overrightarrow{AN}} = z_N - z_A = z^2 - 1$ et : $z_{\overrightarrow{AP}} = z_P - z_A = \dfrac{1}{z} - 1$
$\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{AP}} = k\, z_{\overrightarrow{AN}}$
Or, d'après la question précédente : $z^2 - \dfrac{1}{z} = (z^2 + z + 1)(1 - \dfrac{1}{z})$
Autrement dit : $z_{\overrightarrow{AP}} = (z^2 + z + 1)\, z_{\overrightarrow{AN}}$
Ainsi, les points A, N et P sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + i\,y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
$z^2 + z + 1 = (x + i\,y)^2 + x + i\,y + 1$
$z^2 + z + 1 = x^2 + 2\,x\,y\,i + y^2\,i^2 + x + i\,y + 1$
$z^2 + z + 1 = x^2 + 2\,x\,y\,i - y^2 + x + i\,y + 1$
$z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + i\,(2\,x\,y + y)$

4. a) On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ tels que les points A, N et P sont alignés.
D'après la question 2. on a :
$\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.
On rappelle qu'un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
Or, d'après la question 3. on a : $z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + i\,(2\,x\,y + y)$
Ainsi, $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ si et seulement si $2\,x\,y + y = 0 \iff y\,(2\,x + 1) = 0$
Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Donc $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ si et seulement si $y = 0$ ou $2\,x + 1 = 0 \iff y = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$
On en déduit que $\mathscr{E}$ est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et de la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

b) L'ensemble $\mathscr{E}$ est tracé en rouge.



Exercice n°3 :

Partie A : QCM

1. Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

   a) 3 **b)** i **c)** $3 + i$

Méthode 1 : $2z + \bar{z} = 2(3 + i) + 3 - i = 6 + 2i + 3 - i = 9 + i$
Donc $z = 3 + i$ est solution de l'équation. **Réponse C**

Méthode 2 : On note $z = x + iy$
$2z + \bar{z} = 9 + i \Leftrightarrow 2(x + iy) + x - iy = 9 + i \Leftrightarrow 3x + iy = 9 + i$
Or *deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire*
Donc $3x + iy = 9 + i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ Conclusion : $z = 3 + i$ **Réponse C**

2. z est un nombre complexe, $|z + i|$ est égal à :

   a) $|z| + 1$ **b)** $|z - 1|$ **c)** $|i\bar{z} + 1|$

$|z + i| = |x + iy + i| = |x + i(y + 1)| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$
$|z| + 1 = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$
$|z - 1| = |x + iy - 1| = |x - 1 + iy| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$
$|i\bar{z} + 1| = |i(x - iy) + 1| = |ix + y + 1| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$

Conclusion : $|z + i| = |i\bar{z} + 1|$ **Réponse C**

2. A et B sont deux points d'affixes respectives i et -1.
   L'ensemble des points M d'affixes z telle que $|z - i| = |z + 1|$ est :

   a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre [AB] **c)** La droite perpendiculaire à [AB] passant par O.

$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow AM = BM$
Ainsi les points M vérifiant l'égalité précédente sont les points équidistants de A et de B.
Il s'agit donc de la médiatrice du segment [AB].
Or la médiatrice d'un segment est la droite qui le coupe perpendiculairement et en son milieu.
D'autre part, le point O est bien situé dans cet ensemble puisque : $|0 - i| = |0 + 1| = 1$
Réponse C.

Partie B : *Répondre aux questions suivantes en justifiant les résultats. Les 3 questions sont indépendantes.*

Question 1 : Ω est le point d'affixe $1 - i$ .Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$.

$|z - 1 + i| = |3 - 4i|$
$|x + iy - 1 + i| = |3 - 4i|$
$|x - 1 + i(y + 1)| = |3 - 4i|$
$\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$
$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$
$\mathcal{E}$ est donc le cercle de centre $\Omega(1 - i)$ et de rayon 5

Autre méthode : On note A le point d'affixe $1 - i$
$|z - 1 + i| = |3 - 4i| \Leftrightarrow AM = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow AM = 5$
$\mathcal{E}$ est donc le cercle de centre $\Omega(1 - i)$ et de rayon 5

Question 2 : Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z, $z \neq 1+i$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-3i}{z-1-i}$.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que z' soit un imaginaire pur.

$$z' = \frac{z-3i}{z-1-i} = \frac{x+iy-3i}{\boldsymbol{x+iy-1-i}} = \frac{x+i(y-3)}{\boldsymbol{x-1+i(y-1)}} = \frac{(x+i(y-3))(x-1-i(y-1))}{(\boldsymbol{x-1+i(y-1)})(x-1-i(y-1))} = \frac{x(x-1)+(y-3)(y-1)+i(x(-x+1)+(y-3)(x-1))}{\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$

Or z' est un imaginaire pur si et seulement si $Re(z')=0$ et $(x-1)^2+(y-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 1+i$

$Re(z')=0 \Leftrightarrow x(x-1)+(y-3)(y-1)=0$

$Re(z')=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2-x+y^2-4y+3=0}$

$Re(z')=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y-2)^2-4+3=0}$

$Re(z')=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{5}{4}}$

D'autre part : le point $A(1+i)$ appartient à ce cercle, en effet : $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+(1-2)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2=\frac{5}{4}$

Or l'affixe du point A est la valeur qui annule le dénominateur de z', le point A est donc à exclure de l'ensemble $\mathcal{F}$.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que z' soit un imaginaire pur est l'ensemble des points du cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ excepté le point $A(1+i)$

Question 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - sin(x)$.

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq sin(x) \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq -sin(x) \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R} : 2x-1 \leq 2x - sin(x) \leq 2x+1$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty$ donc d'après le <u>théorème de comparaison</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$