Nom : Classe : T ES	**Devoir surveillé n°1** le 30/09/2015	Note : … / 30

La notation du devoir prendra en compte les efforts de soin, de présentation et de rédaction.
Une fois que vous aurez fini ce devoir vous complèterez la grille d'autoévaluation suivante.

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Exercice 1				
Répondre à un QCM de façon satisfaisante (Bonne connaissance des bases).				
Exercice 2				
Utiliser les formules associées aux suites géométriques / aux suites arithmétiques.				
Démontrer la nature d'une suite.				
Justifier le sens de variation d'une suite géométrique / d'une suite arithmétique.				
Calculer une somme.				
Ecrire un algorithme.				
Exercice 3				
Résoudre un problème concret modélisé par une suite.				
Modéliser une situation à l'aide d'une suite.				
Exercice 4				
Calculer les premiers termes d'une suite.				
Démontrer la nature d'une suite.				
Exprimer le terme général d'une suite en fonction de *n*.				
Comprendre un algorithme.				

Exercice 1 : QCM **… / 5**

Pour chaque question il y a une seule réponse correcte. Entoure la. Aucune justification n'est demandée.

Partie A : On note (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1) Pour tout entier naturel n, u_{n+1} est égal à :

a) $u_n+\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}u_n$ c) $(u_n)^{\frac{1}{2}}$

2) Pour tout entier naturel n, u_n est égal à :

a) $2+\frac{1}{2}u_n$ b) 2^{1-n} c) 2^{n+1}

3) La limite de la suite (u_n) est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ...$

a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$

Partie B : On suppose que depuis 1990 le prix d'un bien immobilier augmente chaque année de 5 %. En 2010 ce bien valait 150 000 €.

1) En 1990, l'arrondi à l'euro de ce bien était :

a) 56 533 € b) 53 773 € c) 60 000 €

2) En supposant que l'évolution se poursuive ainsi, ce bien vaudra plus de 200 000 € en :

a) 2011 b) 2014 c) 2016

Exercice 2 : En vrac. **… / 9**

1) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ telle que $u_4 = 5$. Calcule u_0 puis u_{12}.

2) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{4^n}{5^{n+1}}$. Démontre sa nature et justifie son sens de variation.

3) (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 3 - 8n$. Démontre sa nature et justifie son sens de variation.

4) Calcule $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots + \frac{256}{6561}$.

5) (a_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_{n+1} = 4a_n - 3$ et $a_0 = 1$.
Ecris un algorithme qui permet d'afficher tous les termes de la suite jusqu'à un rang p saisie en entrée.

Exercice 3 : **… / 6**

En 2012 une personne a placé 1 000 € sur un compte à intérêts composés au taux annuel de 4,5 %.
En supposant qu'elle n'effectue ni retrait, ni versement sur ce compte on note c_n le montant du capital disponible sur le compte en l'an 2012 + n.

1) Précise, en justifiant, la nature de la suite (c_n).

2) Quel sera le capital disponible en 2017, à l'euro près ?

3) a) Justifie le sens de variation de la suite (c_n).

b) Détermine, à l'aide de la calculatrice l'année à partir de laquelle le capital disponible aura doublé.

4) a) On suppose toujours que le taux annuel est de 4,5 % mais chaque année la personne effectue un versement supplémentaire de 600 €. Modélise cette situation à l'aide d'une suite (u_n).

b) La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifie.

Exercice 4 : **… / 10**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1) Calcule u_1, u_2, et u_3.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 5$.

a) Calcule les quatre premiers termes de la suite (v_n).

b) Démontre que (v_n) est une suite géométrique. Précise son 1er terme et sa raison.

c) Déduis-en l'expression de v_n en fonction de n.

3) Exprime u_n en fonction de n.

4) Pour tout entier naturel n on pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

a) Exprime S_n en fonction de n.

b) Que permet de faire l'algorithme suivant ?

```
Saisir P
N prend la valeur 0
S prend la valeur 6
Pour I variant de 1 à P faire
    N prend la valeur N + 1
    S prend la valeur S + 6 × 2^N
Fin Pour
Afficher S
```

c) Calcule le résultat affiché lorsque la valeur saisie en entrée est P = 7.

Correction du DS n°1

Exercice 1 : QCM

Partie A : On note (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1) Pour tout entier naturel n, u_{n+1} est égal à :

a) $u_n + \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} u_n$ c) $(u_n)^{\frac{1}{2}}$

2) Pour tout entier naturel n, u_n est égal à :

a) $2 + \frac{1}{2} u_n$ b) 2^{1-n} c) 2^{n+1}

3) La limite de la suite (u_n) est $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = ...$

a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$

Partie B : On suppose que depuis 1990 le prix d'un bien immobilier augmente chaque année de 5 %. En 2010 ce bien valait 150 000 €.

1) En 1990, l'arrondi à l'euro de ce bien était :

a) 56 533 € b) 53 773 € c) 60 000 €

2) En supposant que l'évolution se poursuive ainsi, ce bien vaudra plus de 200 000 € en :

a) 2011 b) 2014 c) 2016

Exercice 2 : En vrac.

1) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ telle que $u_4 = 5$. Calcule u_0 puis u_{12}.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$

Donc : $u_4 = u_0 \times 0{,}9^4$

$5 = u_0 \times 0{,}6561$

$$u_0 = \frac{5}{0{,}6561} = \frac{50000}{6561} \approx 7{,}62$$

On en déduit : $u_{12} = u_0 \times 0{,}9^{12} = \frac{50000}{6561} \times 0{,}9^{12} \approx 2{,}15$

2) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{4^n}{5^{n+1}}$. Démontre sa nature et justifie son sens de variation.

$$v_0 = \frac{4^0}{5^1} = \frac{1}{5} \qquad v_1 = \frac{4^1}{5^2} = \frac{4}{25} \qquad v_2 = \frac{4^2}{5^3} = \frac{16}{125}$$

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{25} \times \frac{5}{1} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{16}{125}}{\frac{4}{25}} = \frac{16}{125} \times \frac{25}{4} = \frac{4 \times 4 \times 25}{25 \times 5 \times 4} = \frac{4}{5} \quad \text{Donc} \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_1}{v_0}$$

La suite semble géométrique de raison $q = \frac{4}{5}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{4^n}{5^{n+1}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{5^{n+2}}}{\frac{4^n}{5^{n+1}}} = \frac{4^{n+1}}{5^{n+2}} \times \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{4 \times 4^n \times 5^{n+1}}{5 \times 5^{n+1} \times 4^n} = \frac{4}{5}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{4}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{5}$.

Puisque $q = \frac{4}{5} \in]0\,;1[$ et $v_0 = \frac{1}{5} > 0$ alors (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

3) (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 3 - 8n$. Démontre sa nature et justifie son sens de variation.

$w_0 = 3 - 8 \times 0 = 3 \qquad w_1 = 3 - 8 \times 1 = 3 - 8 = -5 \qquad w_2 = 3 - 8 \times 2 = 3 - 16 = -13$

$w_1 - w_0 = -5 - 3 = -8$ et $w_2 - w_1 = -13 + 5 = -8$ Donc $w_2 - w_1 = w_1 - w_0$

La suite semble arithmétique de raison $r = -8$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = 3 - 8(n+1) - (3 - 8n) = 3 - 8n - 8 - 3 + 8n = -8$

La suite (w_n) est donc arithmétique de raison $r = -8$ et de premier terme $w_0 = 3$.

Puisque $r = -8 < 0$ alors (w_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

4) Calcule $S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+...+\frac{256}{6561}$.

$$S=(\frac{2}{3})^0+(\frac{2}{3})^1+(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^3+...+(\frac{2}{3})^8$$

$8-0+1=9$

Donc S est la somme des 9 premiers termes de la suite géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme 1.

$$S=\text{ premier terme }\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

$$S=1\times\frac{1-(\frac{2}{3})^9}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1-(\frac{2}{3})^9}{\frac{1}{3}}=3[1-(\frac{2}{3})^9]\approx 2{,}92$$

5) (a_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_{n+1}=4a_n-3$ et $a_0=1$.

Ecris un algorithme qui permet d'afficher tous les termes de la suite jusqu'à un rang p saisie en entrée.

```
Saisir P
A prend la valeur 1
Afficher A
Pour I allant de 1 à P faire :
     A prend la valeur 4 × A – 3
     Afficher A
Fin Pour
```

<u>Exercice 3</u> :

En 2012 une personne a placé 1 000 € sur un compte à intérêts composés au taux annuel de 4,5 %.
En supposant qu'elle n'effectue ni retrait, ni versement sur ce compte on note c_n le montant du capital disponible sur le compte en l'an 2012 + n.

1) Précise, en justifiant, la nature de la suite (c_n).

D'une année à la suivante le capital disponible augmente de 4,5 %. Cela signifie qu'on multiplie par $1+\frac{4{,}5}{100}=1{,}045$.

On a $c_0 = 1000$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = c_n \times 1{,}045$.
On reconnaît la formule de récurrence associée à une suite géométrique de raison $q = 1{,}045$.

2) Quel sera le capital disponible en 2017, à l'euro près ?
2017 – 2012 = 5
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = c_0 \times 1{,}045^n$.
Donc : $c_5=c_0\times 1{,}045^5=1000\times 1{,}045^5\approx 1246$
Le capital disponible en 2017 sera d'environ 1 246 €.

3) a) Justifie le sens de variation de la suite (c_n).
Puisque $q=1{,}045>1$ et $c_0=1000>0$ alors (c_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

b) Détermine, à l'aide de la calculatrice l'année à partir de laquelle le capital disponible aura doublé.
Le capital disponible aura doublé lorsqu'il aura atteint ou dépassé 2 000 €.
La suite est croissante et d'après ma calculatrice $c_{15} \approx 1935$ et $c_{16} \approx 2022$.
Il faut donc 16 ans pour que le capital double.
2012 + 16 = 2028
C'est donc à partir de 2028 que le capital disponible aura doublé.

4) a) On suppose toujours que le taux annuel est de 4,5 % mais chaque année la personne effectue un versement supplémentaire de 600 €. Modélise cette situation à l'aide d'une suite (u_n).
On modélise la situation en posant : $u_0 = 1000$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times 1{,}045 + 600$

b) La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifie.
$u_0 = 1000$
$u_1 = u_0 \times 1{,}045 + 600 = 1000 \times 1{,}045 + 600 = 1045 + 600 = 1645$
$u_2 = u_1 \times 1{,}045 + 600 = 1645 \times 1{,}045 + 600 = 2319{,}025$

$$\frac{u_1}{u_0}=\frac{1645}{1000}=1{,}645 \text{ mais } \frac{u_2}{u_1}=\frac{2319{,}025}{1645}\approx 1{,}4\neq 1{,}645$$

Donc (u_n) ne peut pas être géométrique.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2\ u_n + 5$.

1) Calcule u_1, u_2, et u_3.

$u_0 = 1$
$u_1 = u_0 \times 2 + 5 = 1 \times 2 + 5 = 7$
$u_2 = u_1 \times 2 + 5 = 7 \times 2 + 5 = 14 + 5 = 19$
$u_3 = u_2 \times 2 + 5 = 19 \times 2 + 5 = 38 + 5 = 43$

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 5$.

a) Calcule les quatre premiers termes de la suite (v_n).

$v_0 = u_0 + 5 = 1 + 5 = 6$
$v_1 = u_1 + 5 = 7 + 5 = 12$
$v_2 = u_2 + 5 = 19 + 5 = 24$
$v_3 = u_3 + 5 = 43 + 5 = 48$

b) Démontre que (v_n) est une suite géométrique. Précise son 1^er terme et sa raison.

D'après le calcul des premiers termes la suite (v_n) semble géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 6$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

D'une part : $v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = 2\,u_n + 5 + 5 = 2\,u_n + 10$

D'autre part : $2\,v_n = 2(u_n + 5) = 2\,u_n + 10$

Donc : $v_{n+1} = 2\,v_{n.}$ Ce qui démontre la conjecture.

c) Déduis-en l'expression de v_n en fonction de n.

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ v_n = v_0 \times q^n = 6 \times 2^n$

3) Exprime u_n en fonction de n.

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 5$
$\qquad 6 \times 2^n = u_n + 5$

Donc : $u_n = 6 \times 2^n - 5$

4) Pour tout entier naturel n on pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

a) Exprime S_n en fonction de n.

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

$$S_n = 6 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 6 \times \frac{1-2^{n+1}}{-1} = -6\left(1-2^{n+1}\right)$$

b) Que permet de faire l'algorithme suivant ?

```
Saisir P
N prend la valeur 0
S prend la valeur 6
Pour I variant de 1 à P faire
     N prend la valeur N + 1
     S prend la valeur S + 6 × 2^N.
Fin Pour
Afficher S
```

L'algorithme permet de calculer la somme des P + 1 premiers termes de la suite géométrique (v_n) définie par $v_n = 6 \times 2^n$.

c) Calcule le résultat affiché lorsque la valeur saisie en entrée est P = 7.

Lorsque P = 7 on calcule la somme des 8 premiers termes.

$$S_7 = -6\left(1-2^{7+1}\right) = -6\left(1-2^8\right) = 1530$$