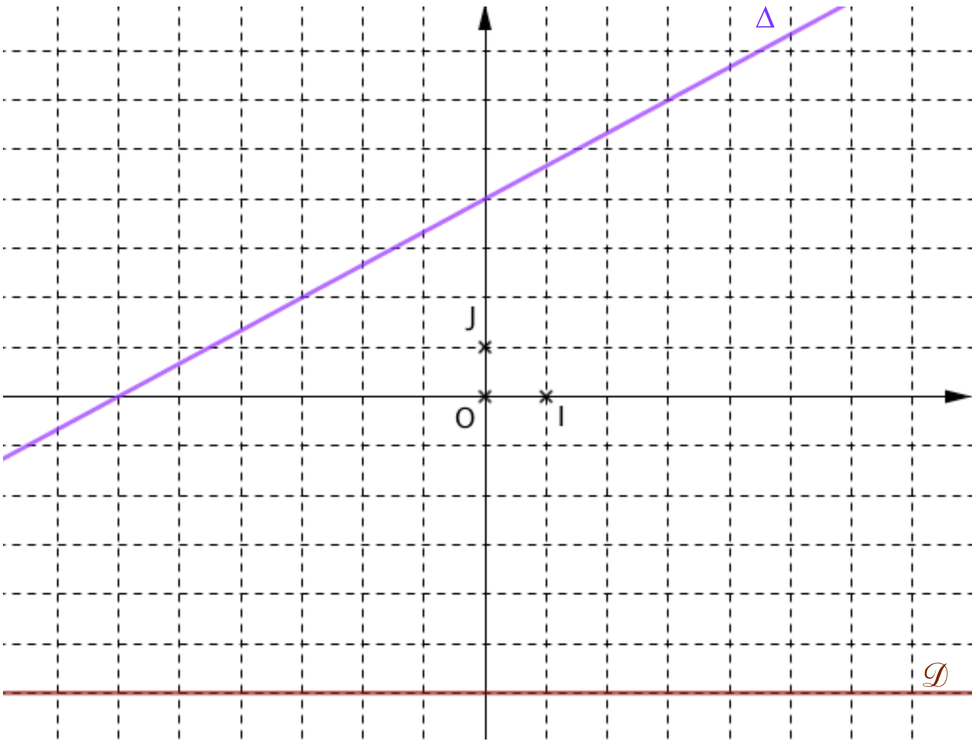
<u>Nom</u> :	**<u>DS n°1</u>**	<u>Classe</u> :
Prénom :	le 09/10/2017	BTS 1

	Avis du professeur		
Compétences évaluées	***Acquis***	***En cours d'acquisition***	***Non Acquis***
Etudier des fonctions affines.			
Etudier des fonctions polynômes du 2nd degré.			
Simplifier des expressions en utilisant les propriétés des fonctions exp et ln.			
Résoudre des équations.			
Résoudre des inéquations.			
Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques.			

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

<u>Exercice 1</u> : f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 6$ et $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. **… / 5**

1. Justifier les sens de variations de f et g.
2. Dresser les tableaux de signes de $f(x)$ et $g(x)$.
3. Construire les représentations graphiques (d) et (d') respectives de f et g dans le repère ci-dessous.
4. Calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d').



5. Déterminer, par lecture graphique, les fonctions associées aux droites $\mathscr{D}$ et Δ tracées ci-dessus.

<u>Exercice 2</u> : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$. **… / 4**

1. Déterminer les variations de la fonction f.
2. Etudier le signe de $f(x)$.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x + 1$.

   a) Résoudre $f(x) \geq g(x)$.

   b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.
   <u>Indication</u> : On rappelle que f est représentée graphiquement par une parabole.

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes (en détaillant les étapes). **… / 4**

A = $ln(9) - ln(\frac{1}{3})$ B = $ln(4^{-3}) + 5\,ln(2) + ln(\frac{1}{2})$ C = $e^{2x} \times (e^{-x})^3$ D = $\frac{e^{3x+1}}{e^{2x+4}}$

E = $\frac{e^{3x}}{(e^x)^2 \times e}$ F = $e^{ln(2)} \times ln(e^3)$ G = $ln(\frac{e^3}{4}) + ln(\frac{1}{e})$ H = $\frac{e^{2ln5}}{(e^{ln5})^3 \times e^{ln1}}$

Exercice 4 : Résoudre les équations et inéquations suivantes. **… / 3**

a) $ln\,x = -5$ b) $e^x = -5$ c) $ln(5 - 2x) = 1$ d) $e^{2-3x} < 1$ e) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

Exercice 5 : **… / 2**

1. Résoudre l'inéquation suivante sur l'intervalle I donné.

$$ln(x^2 - 3) > 0 \text{ sur } I =]\sqrt{3}\ ;+\infty[$$

2. Déterminer l'intervalle de définition de l'inéquation suivante puis la résoudre.

$$ln(1 - 5x) < 2$$

Exercice 6 : **… / 2**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$\sqrt{3} - 2\,sin\,x = 0$$

2. Résoudre sur$]-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation suivante :

$$2\,cos\,x - \sqrt{2} < 0$$

Correction du DS n°1

Exercice 1 : f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 6$ et $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

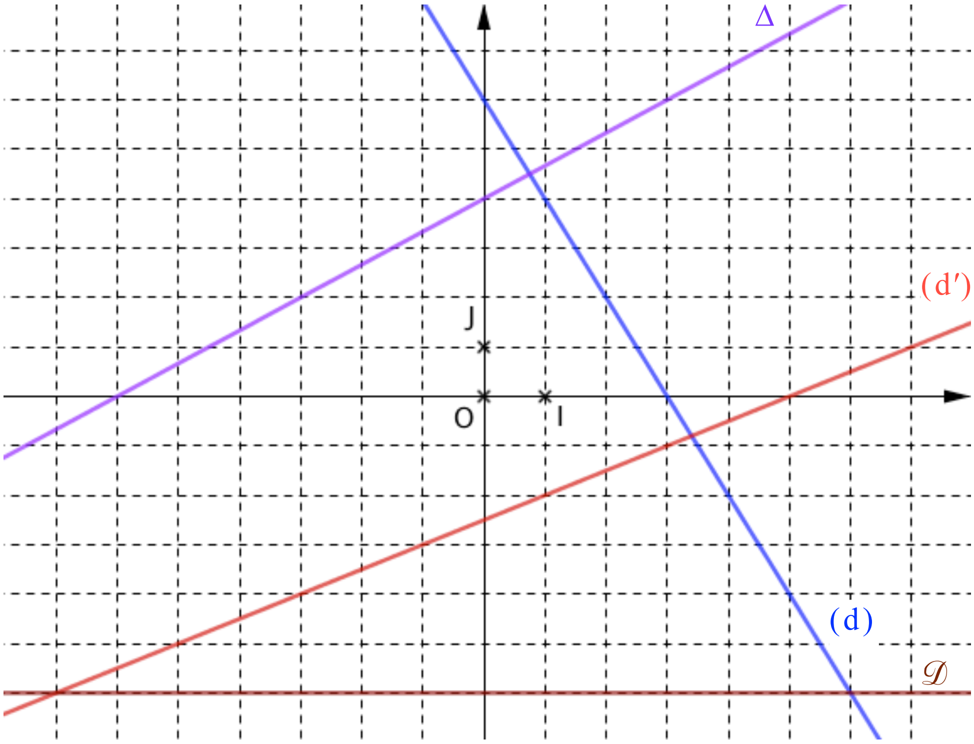
1. f est décroissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur (-2) est négatif.
   g est croissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur ($\frac{1}{2}$) est positif.

2. $f(x) > 0 \iff -2x + 6 > 0 \iff -2x > -6 \iff x < \frac{6}{2} \iff x < 3$
   $g(x) > 0 \iff \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} > 0 \iff \frac{1}{2}x > \frac{5}{2} \iff x > \frac{5}{2} \div \frac{1}{2} \iff x > 5$
   On en déduit les tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

3. Construire les représentations graphiques (d) et (d′) respectives de f et g dans le repère ci-dessous.



4. Calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d′).

   On résout : $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$

   $-2x + 6 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \iff -4x + 12 = x - 5 \iff 12 + 5 = x + 4x \iff 5x = 17 \iff x = \frac{17}{5}$

   On remplace x par $\frac{17}{5}$ dans l'équation de la droite (d) :

   $y = -2 \times \frac{17}{5} + 6 = -\frac{34}{5} + \frac{30}{5} = -\frac{4}{5}$

   Le point d'intersection de (d) et (d′) est $M(\frac{17}{5}\ ;\ -\frac{4}{5})$.

5. Déterminer, par lecture graphique, les fonctions associées aux droites $\mathscr{D}$ et Δ tracées ci-dessus.
   La fonction associée à $\mathscr{D}$ est la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -6$.
   Celle associée à Δ est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = \frac{2}{3}x + 4$.

Exercice 2 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$.

1. Déterminer les variations de la fonction f.

   $a = 4 > 0$ et : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{8}$
   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty;-\frac{5}{8}]$ puis croissante sur $[-\frac{5}{8};+\infty[$.

2. Etudier le signe de $f(x)$.

   $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 4 \times 1 = 25 - 16 = 9 > 0$
   On en déduit deux racines distinctes :
   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{9}}{8} = \frac{-5-3}{8} = \frac{-8}{8} = -1$ et : $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+3}{8} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$
   Le trinôme est du signe contraire de a entre ses racines. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x + 1$.

   a) Résoudre $f(x) \geq g(x)$.
   $4x^2 + 5x + 1 \geq -3x + 1$
   $4x^2 + 8x \geq 0$
   $4x(x + 2) \geq 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc : $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 4x(x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -2] \cup [0 ; +\infty[$.

   b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

   Graphiquement, la parabole représentative de f est au dessus de la droite d'équation $y = -3x + 1$ sur les intervalles $]-\infty ; -2]$ et $[0 ; +\infty[$.

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes (en détaillant les étapes).

A = $ln(9) - ln(\frac{1}{3}) = ln(3^2) + ln(3) = 2\,ln(3) + ln(3) = 3\,ln(3)$

B = $ln(4^{-3}) + 5\,ln(2) + ln(\frac{1}{2}) = -3\,ln(2^2) + 5\,ln(2) - ln(2) = -6\,ln(2) + 4\,ln(2) = -2\,ln(2)$

C = $e^{2x} \times (e^{-x})^3 = e^{2x} \times e^{-3x} = e^{-x}$

D = $\frac{e^{3x+1}}{e^{2x+4}} = e^{3x+1-2x-4} = e^{x-3}$

E = $\frac{e^{3x}}{(e^x)^2 \times e} = \frac{e^{3x}}{e^{2x} \times e^1} = \frac{e^{3x}}{e^{2x+1}} = e^{3x-2x-1} = e^{x-1}$

F = $e^{ln(2)} \times ln(e^3) = 2 \times 3 = 6$

G = $ln(\frac{e^3}{4}) + ln(\frac{1}{e}) = ln(e^3) - ln(4) - ln(e) = 3 - ln(2^2) - 1 = 2 - 2\,ln(2)$

H = $\frac{e^{2ln5}}{(e^{ln5})^3 \times e^{ln1}} = \frac{e^{ln(5^2)}}{e^{3ln5} \times 1} = \frac{5^2}{e^{ln(5^3)}} = \frac{5^2}{5^3} = \frac{1}{5}$

Exercice 4 : Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $ln\, x = -5 \iff x = e^{-5}$
b) $e^x = -5$ Cette équation n'a aucune solution car : $\forall\, x \in \mathbb{R},\, e^x > 0$
c) $ln(5-2x) = 1 \iff 5-2x = e^1 \iff x = \frac{e-5}{-2} = \frac{5-e}{2}$
d) $e^{2-3x} < 1 \iff 2-3x < ln(1) \iff 2-3x < 0 \iff 2 < 3x \iff x > \frac{2}{3}$
e) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
En posant $X = e^x$ on a : $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff X^2 - 5X + 6 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$
On en déduit deux racines distinctes :
$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et : $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3$
Or : $X = e^x$
On en déduit : $e^x = 2$ ou : $e^x = 3 \iff x = ln(2)$ ou : $x = ln(3)$

Exercice 5 :

1. Résoudre l'inéquation suivante sur l'intervalle I donné.

$$ln(x^2-3) > 0 \text{ sur I} =]\sqrt{3}\,;+\infty[$$

$ln(x^2-3) > 0 \iff x^2 - 3 > e^0 \iff x^2 - 3 > 1 \iff x^2 > 4 \iff x \in]-\infty\,;-2[\, \cup\,]2\,;+\infty[$
On demande de résoudre l'inéquation sur I = $]\sqrt{3}\,;+\infty[$ avec $\sqrt{3} \approx 1,73$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est donc restreint à $]2\,;+\infty[$ qui est inclus dans I.

2. Déterminer l'intervalle de définition de l'inéquation suivante puis la résoudre.

$$ln(1-5x) < 2$$

L'inéquation n'est définie que si et seulement si : $1-5x > 0 \iff 1 > 5x \iff x < \frac{1}{5} \iff x \in]-\infty\,;0,2[$.
$ln(1-5x) < 2 \iff 1-5x < e^2 \iff 1-e^2 < 5x \iff x > \frac{1-e^2}{5} \approx -1,28$
Finalement : $ln(1-5x) < 2 \iff x \in]\frac{1-e^2}{5}\,;0,2[$.

Exercice 6 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$\sqrt{3} - 2\,sin\,x = 0$$

$\sqrt{3} - 2\,sin\,x = 0 \iff sin\,x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff sin\,x = sin\,\frac{\pi}{3}$
Donc : $x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi$ ou : $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\,k'\,\pi$ où k et k' sont deux entiers relatifs.
$x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2\,k'\,\pi$

2. Résoudre sur$]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante :

$$2\,cos\,x - \sqrt{2} < 0$$

$2\,cos\,x - \sqrt{2} < 0 \iff cos\,x < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff cos\,x < cos\,\frac{\pi}{4} \iff x \in]-\pi\,;-\frac{\pi}{4}[\, \cup\,]\frac{\pi}{4}\,;\pi]$