Nom :
Prénom :

DS n°1
le 27/09/2018

Classe :
T S …

	Avis du professeur		
Compétences évaluées	***Acquis***	***En cours d'acquisition***	***Non Acquis***
Exercices contrôlés (EC) 1 à 3 : … / 10			
• Calculer les premiers termes d'une suite.			
• Représenter graphiquement les premiers termes d'une suite.			
• Conjecturer le sens de variation d'une suite et sa limite.			
• Montrer qu'une suite est géométrique.			
• Exprimer le terme général d'une suite en fonction de n.			
• Déterminer le sens de variations d'une suite.			
• Déterminer des limites / Lever des formes indéterminées.			
Exercices 4 et 5 : … / 10			
• Justifier des inégalités.			
• Déterminer des limites par comparaison.			
• Calculer / Justifier une formule de récurrence dans un contexte donné.			
• Utiliser un tableur.			
• Démontrer par récurrence.			
• Déterminer une limite à partir d'une formule explicite.			
• Compléter un algorithme.			
• Déduire / Interpréter des résultats dans un contexte donné.			

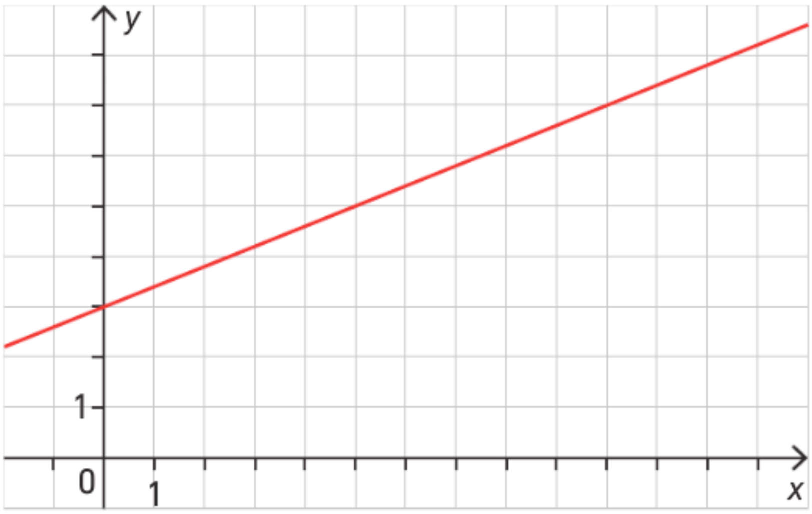
Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : (EC) **… / 4**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a) Construire, sur le graphique ci-dessous, les 4 premiers termes de la suite (u_n).



b) Conjecturer le sens de variations de (u_n) ainsi que sa limite L.

3. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 5$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 2 : (EC) **… / 2**

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^n}{5^{n+2}}$.

Exercice 3 : (EC) **… / 4**

Déterminer les limites des suites définies par :

a) $a_n = n^2 + 3n - 1$ b) $b_n = n^3(-2 + \frac{1}{n} - \frac{10}{n^2} + \frac{3}{n^3})$ c) $c_n = (\sqrt{n} - 2)(10 - \frac{1}{n})$ d) $d_n = \frac{n^2+3n}{4n^3-n+7}$

Exercice 4 : **… / 2**

(u_n) et (v_n) sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{cosn}{\sqrt{n}} \quad \text{et :} \quad v_n = -n + 1 + (-1)^n$$

Justifier les inégalités suivantes puis déterminer la convergence des suites (u_n) et (v_n).

a) $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $v_n \leq -n + 2$

Exercice 5 : **… / 8**

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017.
Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés devient inférieur à 2000.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = 0,95\, u_n + 76$.
3. A l'aide d'un tableur on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554

   Quelle formule a-t-il saisi dans la cellule C2 pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes de (u_n) ?

4. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq u_{n+1} \geq 1500$

   b) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

5. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

   b) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on déduire de ce résultat ?

6. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve sera inférieur à 2000.

```
N ← 0
U ← 3000
Tant que …
    N ← …
    U ← …
Fin Tant que
Afficher …
```

   b) Interpréter le résultat affiché dans le contexte de l'exercice.

Correction du DS n°1

Exercice 1 : Voir la correction de l'exercice n° 50 p 20.

Exercice 2 : Exercice de révision du programme de 1ère S traité dans la partie cours.

Exercice 3 : Voir la correction de l'exercice n°28 p 46 et de l'exercice 5 du cours.

Exercice 4 : (u_n) et (v_n) sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{cosn}{\sqrt{n}} \quad \text{et :} \quad v_n = -n + 1 + (-1)^n$$

Justifier les inégalités suivantes puis déterminer la convergence des suites (u_n) et (v_n).

a) $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $v_n \leq -n + 2$

a) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq cos\, n \leq 1$ En multipliant chaque membre par $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ on a : $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{cosn}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$	b) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $(-1)^n \leq 1$ En additionnant $-n + 1$ sur chaque membre on a : $-n + 1 + (-1)^n \leq -n + 1 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_n \leq -n + 2$ Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} -n + 2 = -\infty$ Donc, d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Exercice 5 :

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017.
Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés devient inférieur à 2000.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.

Au 1er juin 2017 on comptait $u_0 = 3000$ cétacés dans la réserve. Au 31 octobre, 80 cétacés supplémentaires sont arrivés puis le 31 mai suivant, en 2018, la réserve a subit une baisse de 5 % de son effectif total. Cela signifie qu'elle a conservé 95 % de son effectif. Ainsi : $u_1 = \frac{95}{100}(3000 + 80) = 0,95 \times 3080 = 2926$

2. Justifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = 0,95\, u_n + 76$.

Soit u_n le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. D'ici le 1er juin de l'année suivante, l'effectif aura augmenté de 80 puis l'effectif total aura diminué de 5 %. Ainsi, il restera 95 % des cétacés. Donc : $u_{n+1} = \frac{95}{100}(u_n + 80) = 0,95\, u_n + 76$

3. A l'aide d'un tableur on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554

Quelle formule a-t-il saisi dans la cellule C2 pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes de (u_n) ?

En C2, on tape : $= 0,95$*B2 + 76

4. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq u_{n+1} \geq 1500$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geq u_{n+1} \geq 1500$
Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- Initialisation :
  On a : $u_0 = 3000$ et $u_1 = 2926$
  Donc : $u_0 \geq u_1 \geq 1500$ Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit k un entier naturel. $k \geq 0$.
  Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors : $u_k \geq u_{k+1} \geq 1500$
  En multipliant chaque membre des inégalités par $0,95 > 0$ on a :

  $$0,95\, u_k \geq 0,95\, u_{k+1} \geq 0,95 \times 1500$$

  $$0,95\, u_k \geq 0,95\, u_{k+1} \geq 1425$$

  En ajoutant 76 membre à membre, on en déduit :

  $$0,95\, u_k + 76 \geq 0,95\, u_{k+1} + 76 \geq 1425 + 76$$

  Or : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95\, u_n + 76$. Donc :

  $$u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq 1501 \geq 1500$$

  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
  $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1} \geq 1500$

b) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1} \geq 1500$
Cela signifie que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1500.
On peut en déduire que (u_n) converge vers un réel L ≥ 1500.

5. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.
Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- Initialisation :
  On a : $u_0 = 3000$
  Et : $1480 \times 0,95^0 + 1520 = 1480 + 1520 = 3000 = u_0$
  Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit k un entier naturel. $k \geq 0$.
  Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors : $u_k = 1480 \times 0,95^k + 1520$.
  Or : $u_{k+1} = 0,95\, u_k + 76$
  Donc : $u_{k+1} = 0,95(1480 \times 0,95^k + 1520) + 76$
  $u_{k+1} = 1480 \times 0,95^{k+1} + 0,95 \times 1520 + 76$
  $u_{k+1} = 1480 \times 0,95^{k+1} + 1520$
  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
  $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on déduire de ce résultat ?

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

-1 < $0,95 < 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$

On en déduit, par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1480 \times 0,95^n = 0$ Puis, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1480 \times 0,95^n + 1520 = 1520$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$

On peut déduire de ce résultat que dans un très grand nombre d'années, le nombre de cétacés dans la réserve tendra à se rapprocher de 1520. Ce nombre étant inférieur à 2000, le classement de la zone en réserve marine ne sera pas reconduit.

6. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve sera inférieur à 2000.

```
N ← 0
U ← 3000
Tant que U ≥ 2000
    N ← N+1
    U ← 0,95U+76        ou : U ← 1480 × 0,95^N + 1520
Fin Tant que
Afficher 2017+N
```

b) Interpréter le résultat affiché dans le contexte de l'exercice.

En appliquant cet algorithme à la calculatrice ou en utilisant le menu TABLE on obtient que les termes de la suite (u_n) deviennent inférieur à 2000 à partir du rang N = 22

$2017 + 22 = 2039$

Ainsi, le nombre de cétacés dans la réserve marine deviendra inférieur à 2000 à partir de 2039.