Nom :
Classe : TMATHS1

DS n°1
Suites

Le : 03/10/2022
Durée : 2h
Note : … / 20

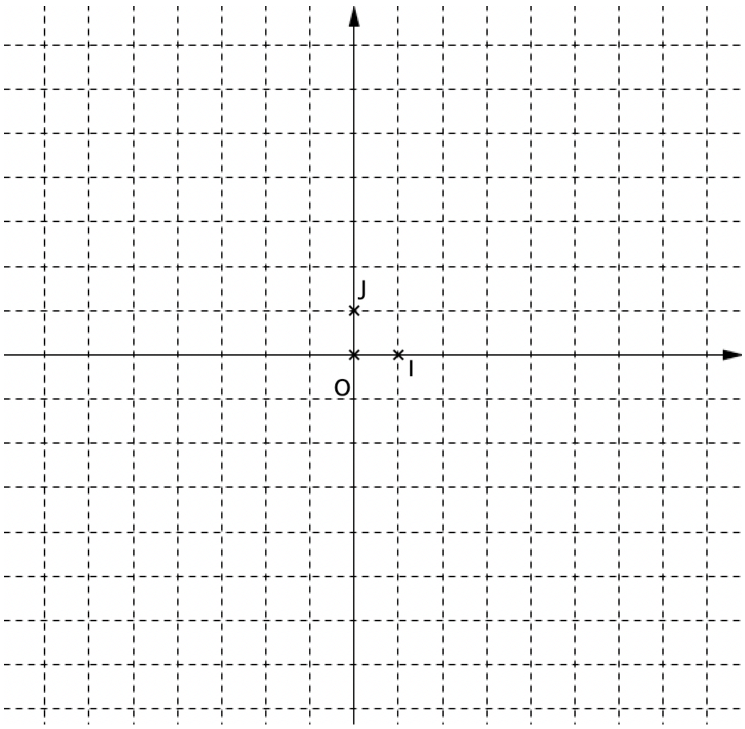
	Avis du professeur
Compétences évaluées :	Non maîtrisée — Bien maîtrisée
S'approprier les exercices / les méthodes travaillé(e)s en classe.	
Compétences du livret scolaire :	
• (C1) Mener une recherche de façon autonome.	Non évaluée
• (C2) Modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle.	
• (C3) Représenter, choisir un cadre, changer de registre.	
• (C4) Calculer, appliquer des techniques, mettre en œuvre des algorithmes.	
• (C5) Raisonner, argumenter en exerçant un regard critique, démontrer.	
• (C6) Communiquer à l'écrit en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents.	
• (C7) Communiquer à l'oral en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents.	

Exercices Contrôlés : En vrac **… / 10**

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul on a $u_n = 2^n - 1$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -2v_n + 1$.

   a) Dans le repère orthonormé $(\mathrm{O};\mathrm{I},\mathrm{J})$ ci-dessous, tracer les droites d et Δ d'équations respectives $y = -2x + 1$ et $y = x$ puis construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (v_n).



   b) Cette suite est-elle monotone sur $\mathbb{N}$? Justifier.

3. Déterminer les limites des suites définies par :

   a) $u_n = 10n^2 - 5n^4 + 7$ b) $v_n = \dfrac{2n-4}{n^2+1}$ c) $v_n = 1 + \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2+1}$.

4. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
On admet que la suite (u_n) converge vers 1.

   a) Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   b) Calculer la limite de $\dfrac{u_n + 2}{u_n - 1}$.

5. Démontrer que la suite (u_n), définie par $u_n = -3 \times (\dfrac{2}{3})^n + 4$, est croissante sur $\mathbb{N}$ puis déterminer sa limite.

Exercice 2 : Etude d'une colonie d'oiseaux **… / 10**

Au début de l'année 2022, une colonie d'oiseaux compatit 40 individus.

L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 40 \text{ et } u_{n+1} = 0,008\, u_n\, (200 - \ u_n)$$

Ainsi, u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $2022 + n$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2023.
2. La fonction Python ci-dessous permet de renvoyer une liste de valeurs de la suite (u_n), toutes arrondies à l'unité près.

```python
def valeurs_u(N):
    u=40
    L=[u]
    for i in range (1,N):
        u=0.008*u*(200-u)
        L.append(round(u))
    return L
```

   Déterminer le résultat obtenu suite à l'exécution de l'instruction valeurs_u(5) dans la console Python puis interpréter le dernier résultat contenu dans la liste affichée.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$

   a) Déterminer le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

   b) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et bornée entre 0 et 100.

   c) Que peut-on en déduire ?
4. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel L.

   Après avoir justifié que L est solution de l'équation $-0,008\, L^2 + 1,6\, L = L$, déterminer la limite de (u_n).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. a) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie l'année au début de laquelle la population d'oiseaux dépassera pour la première fois la valeur p.

```python
def seuil(p):
    n=0
    u=40
    while ...
        n= ...
        u= ...
    return ...
```

   b) L'exécution de l'instruction seuil(75) dans la console Python ne renvoie aucun résultat.
   Expliquer pourquoi. Que faut-il taper comme instruction pour obtenir l'année à partir de laquelle on pourra malgré tout estimer que la colonie d'oiseaux atteindra sa taille maximale.

Correction du DS n°1

Exercices contrôlés :

1. Voir la correction de l'exercice p 27 n° 17.
2. Voir la correction de l'exercice 5 du cours.
3. Voir la correction des exercices :
   a) p 61 n°16 b) p 62 n° 17 c) Exercice 3 du cours
4. Voir la correction de l'exercice p 62 n° 19 du cours.
5. Voir la correction de l'exercice 15 du cours.

Exercice 2 : Etude d'une colonie d'oiseaux

Au début de l'année 2022, une colonie d'oiseaux compatit 40 individus.

L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 40 \text{ et } u_{n+1} = 0,008\, u_n\, (200 - u_n)$$

Ainsi, u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $2022 + n$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2023.

$u_1 = 0,008\, u_0\, (200 - u_0) = 0,008 \times 40\, (200 - 40) = 0,32 \times 160 = 51,2$
Ainsi, on peut estimer que la colonie d'oiseaux comportera 51 individus au début de l'année 2023.

2. La fonction Python ci-dessous permet de renvoyer une liste de valeurs de la suite (u_n), toutes arrondies à l'unité près.

```python
def valeurs_u(N):
    u=40
    L=[u]
    for i in range (1,N):
        u=0.008*u*(200-u)
        L.append(round(u))
    return L
```

Déterminer le résultat obtenu suite à l'exécution de l'instruction valeurs_u(5) dans la console Python puis interpréter le dernier résultat contenu dans la liste affichée.

Le résultat renvoyé est $[40, 51, 61, 68, 72]$.
On peut en déduire qu'au début de l'année 2026, la colonie d'oiseaux sera composée d'environ 72 individus.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$

   a) Déterminer le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0,008x(200 - x) = -0,008x^2 + 1,6x$

On reconnaît une fonction polynôme du 2nd degré.
$a = -0,008 < 0$. On en déduit que la parabole représentative de f est ouverte vers le bas.
Son sommet $S(\alpha; \beta)$ en est le point le plus haut.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1,6}{-0,016} = \frac{1\,600}{16} = 100 \qquad \beta = f(100) = -0,008 \times 100^2 + 1,6 \times 100 = -80 + 160 = 80$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	100	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	80	$\searrow$

b) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et bornée entre 0 et 100.

On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$: " $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ "

- Initialisation :

  On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$

  Or $0 \leq 40 \leq 51,2 \leq 100$ Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :

  Soit k un entier naturel. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 100$

  Or f est croissante sur $[\,0\,;\,100\,]$. On en déduit successivement : $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(100)$

  $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 80 \leq 100$

  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :

  $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc elle est toujours vraie.

  Ainsi, $\forall\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$

  Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante et bornée entre 0 et 100.

c) Que peut-on en déduire ?

La suite (u_n) étant croissante et majorée par 100, on en déduit qu'elle converge vers une limite L ≤ 100.

4. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel L.

   Après avoir justifié que L est solution de l'équation $-0,008\,L^2 + 1,6\,L = L$, déterminer la limite de (u_n).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,008\,u_n\,(200 - u_n) = -0,008\,u_n^2 + 1,6\,u_n$

La suite (u_n) converge vers un réel L donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

On en déduit, par produits : $\lim\limits_{n \to +\infty} -0,008\,u_n^2 = -0,008\,L^2$ et : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,6\,u_n = 1,6\,L$

Puis, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} -0,008\,u_n^2 + 1,6\,u_n = -0,008\,L^2 + 1,6\,L$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

On en déduit que L est solution de l'équation (E) : $-0,008\,L^2 + 1,6\,L = L$

(E) $\Leftrightarrow$ $-0,008\,L^2 + 1,6\,L - L = 0$
$-0,008\,L^2 + 0,6\,L = 0$
$-8\,L^2 + 600\,L = 0$ (en multipliant par $1\,000$ chaque membre de l'équation)
$L^2 - 75\,L = 0$ (en divisant par -8 chaque membre de l'équation)
$L\,(L - 75) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
On en déduit deux solution distinctes : $L = 0$ ou $L = 75$

La suite (u_n) étant croissante sur N, elle est nécessairement minorée par son 1er terme $u_0 = 40$.
Ainsi, sa limite ne peut valoir 0. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 75.
Cela signifie que la taille de la colonie augmentera jusqu'à contenir 75 oiseaux dans un grand nombre d'années.

5. a) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie l'année au début de laquelle la population d'oiseaux dépassera pour la première fois la valeur p.

```python
def seuil(p):
    n=0
    u=40
    while u<p:
        n= n+1
        u= 0.008*u*(200-u)
    return 2022+n
```

b) L'instruction seuil(75) dans la console Python ne renvoie aucun résultat car en théorie, la limite de la suite (u_n) n'est jamais atteinte. En revanche, on peut estimer que la colonie d'oiseaux atteindra les 75 individus dès lors que la valeur de u_n deviendra supérieure ou égale à $74,5$. En tapant seuil($74,5$), Python renvoie l'année 2029.