Nom : | **DS n°1** | *Classe* :
Prénom : | le 27/09/2016 | T S …

	Avis de l'élève		Avis du professeur	
Compétences évaluées	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Déterminer la limite d'une suite / Lever des formes indéterminées.				
Faire preuve d'initiatives pour résoudre un problème.				
Comprendre et appliquer pas à pas un algorithme / Donner et interpréter le résultat affiché.				
Rédiger des démonstrations par récurrence.				
Emettre des conjectures.				
Etudier les variations d'une suite.				
Démontrer qu'une suite est géométrique / Préciser son 1er terme et sa raison.				
Exprimer le terme général d'une suite en fonction de n.				
Etudier les variations d'une fonction.				
Construire les 1ers termes d'une suite définie par récurrence.				
Ecrire un algorithme.				
Maîtrise des calculs				
Rédaction des réponses soignée et rigoureuse.				

Barème	Ex 1 : 4 points	Ex 2 : 2 points	Ex 3 : 9,5 points	Ex 4 : 4,5 points	Total : 20 points
Note de l'élève					

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : Déterminer les limites des suites en $+\infty$.

a) $a_n = 4n^2 + 3n - \frac{7}{n} + 2$ b) $b_n = 3 + \frac{5}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ c) $c_n = -4n^2 + 5n - 1$

d) $d_n = \frac{5n^2+n+3}{1-2n^2}$ e) $e_n = \frac{n^3+4n^2-n+6}{1-n^2}$ f) $f_n = (-n+3)(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$

Exercice 2 : Prise d'initiative.

L'iode 131 est très utilisée à petites doses dans l'imagerie médicale, par exemple en scintigraphie.

On souhaite étudier l'évolution au cours du temps du nombre de noyaux d'iode 131 présents dans un organisme humain, après une scintigraphie.

Statistiquement, le nombre de noyaux d'iode 131 contenu dans un organisme humain diminue chaque jour de 8,3 %.

Après injection, un organisme contient initialement 10^7 noyaux d'iodes 131.

Déterminer, en expliquant votre démarche, le nombre de jours nécessaires avant que le nombre de noyaux d'iode 131 présents dans l'organisme devienne inférieur à 1 (et soit ainsi considéré comme nul).

Exercice 3 : Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région.
En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il prévoit d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

Partie A : Utilisation d'un algorithme

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un nombre entier naturel C est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0 Affecter à C la valeur 300
Traitement :	Tant que C < 400 faire N prend la valeur N + 1 C prend la valeur C – C × 0,08 + 50 Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

1. Faire fonctionner l'algorithme en indiquant les valeurs des variables à chaque étape dans le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire, jusqu'à affichage de la dernière valeur de N. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Valeur de N	0	1			
Valeur de C	300	326			
Test C < 400	Vrai	Vrai			

2. Donner et interpréter le résultat fourni par cet algorithme.

Partie B : Modélisation de la situation à l'aide d'une suite définie par récurrence.

1. Expliquer pourquoi l'évolution du nombre de colonies peut être modélisée par la suite définie par :

$$c_0 = 300 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = 0,92c_n + 50$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $c_n < c_{n+1} < 625$.
3. Conjecturer la limite de la suite (c_n). Quelle interprétation peut-on en faire ?

Partie C : Détermination de la formule explicite de (c_n) à l'aide d'un raisonnement par récurrence

1. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = 625 - 325 \times 0,92^n$$

2. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?
3. Etudier les variations de la suite (c_n) en utilisant une autre méthode que celle mise en œuvre en partie B.

Partie D : Détermination de la formule explicite de (c_n) à l'aide d'une suite auxiliaire.

On rappelle que (c_n) est définie par : $c_0 = 300$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = 0,92c_n + 50$
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 625 - c_n$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison.
2. En déduire l'expression de v_n puis de c_n en fonction de n.

Exercice 4 : La suite u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{-}0,1u_n^2 + 2u_n$ permet de modéliser l'évolution, depuis 2010, du nombre de foyers français (en millions) possédant un téléviseur à écran plat.
u_n désigne le nombre de millions de foyers français équipés d'un écran plat, la n-ième année après 2010.

Partie A : Etude d'une fonction.

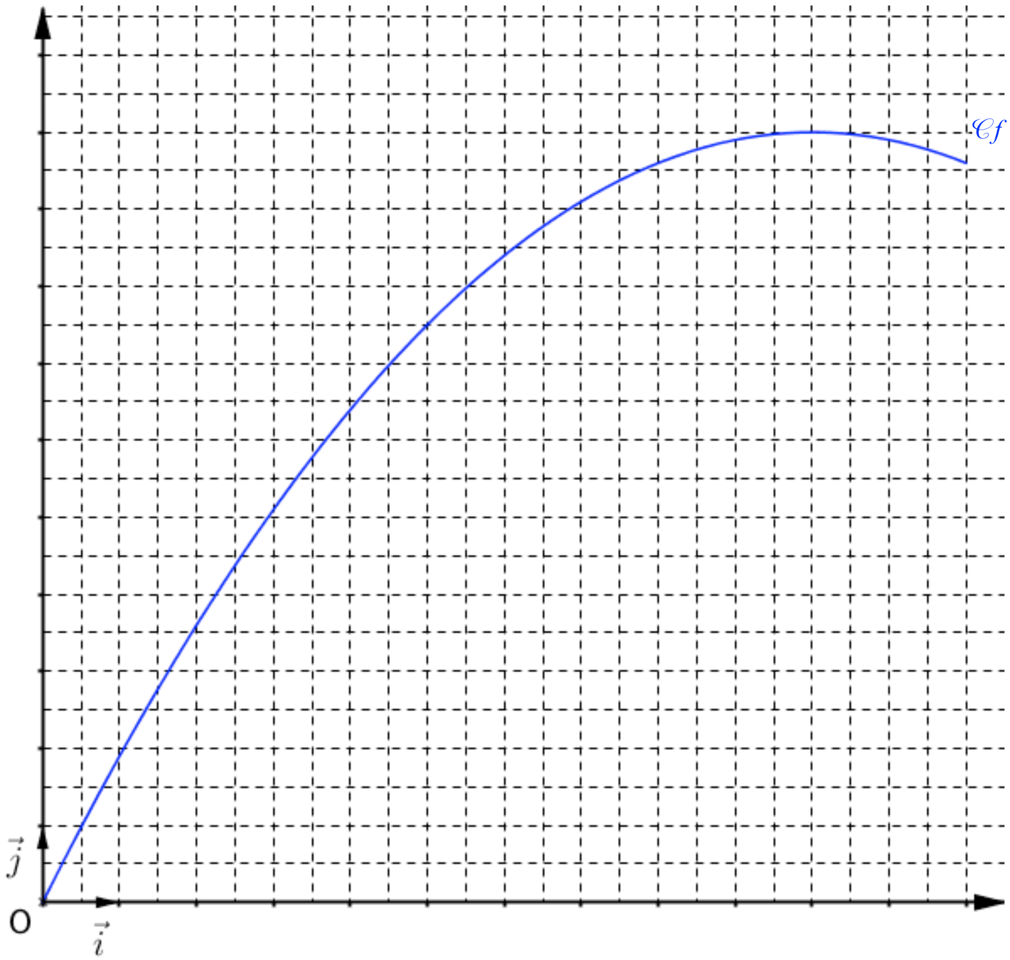
La suite (u_n) est définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{-}0,1x^2 + 2x.$$

Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude de la suite.

La courbe représentative $\mathscr{C}f$ de la fonction f est donnée sur $[0;12]$ dans le repère orthonormé $(\text{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ ci- dessous.



1. a) A l'aide de la courbe tracée, placer sur l'axe des abscisses, les cinq premiers termes de la suite (u_n).

   b) Que peut-on conjecturer pour les variations de cette suite ? Pour sa limite ?

2. a) Démontrer par récurrence les variations de la suite (u_n) et qu'elle est majorée par 10 sur $\mathbb{N}$.

   b) Que peut-on en déduire, concernant l'évolution du nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat depuis 2010 ?

   c) Ecrire un algorithme qui permet de déterminer l'année à partir de laquelle l'écart entre le nombre de foyers français équipés d'un écran plat et 10 millions sera strictement inférieur à 1 000.

Correction du DS n°1

Exercice 1 : Déterminer les limites des suites en +∞.

a) $a_n = 4n^2 + 3n - \frac{7}{n} + 2$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$

On en déduit, par somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (4n^2 + 3n - \frac{7}{n} + 2) = +\infty$

b) $b_n = 3 + \frac{5}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

On en déduit, par somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (3 + \frac{5}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 3$

c) $c_n = -4n^2 + 5n - 1$

Remarque : Dans ce cas, une rédaction directe conduirait à la forme indéterminée +∞ – ∞.
Méthode : On lève l'indétermination en factorisant par le terme de plus haut degré.

$c_n = -4n^2 + 5n - 1 = n^2(-4 + \frac{5n}{n^2} - \frac{1}{n^2}) = n^2(-4 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2})$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. On en déduit, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-4 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}) = -4$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Ainsi, par produit de limites, et puisque -4 < 0, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2(-4 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}) = -\infty$.

d) $d_n = \frac{5n^2+n+3}{1-2n^2}$

Remarque : dans ce cas, une rédaction directe conduirait à la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

$d_n = \frac{5n^2+n+3}{1-2n^2} = \frac{n^2(5+\frac{n}{n^2}+\frac{3}{n^2})}{n^2(\frac{1}{n^2}-2)} = \frac{5+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-2}$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$. On en déduit, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (5 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}) = 5$

De même : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{n^2} - 2) = -2$

Ainsi, par quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-2} = -\frac{5}{2}$.

e) $e_n = \frac{n^3+4n^2-n+6}{1-n^2} = \frac{n^3(1+\frac{4n^2}{n^3}-\frac{n}{n^3}+\frac{6}{n^3})}{n^2(\frac{1}{n^2}-1)} = \frac{n(1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3})}{\frac{1}{n^2}-1}$

Par somme de limites on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{6}{n^3}) = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Donc, par produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{6}{n^3}) = +\infty$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{n^2} - 1) = -1 < 0$. On en déduit, par quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = -\infty$.

f) $f_n = (-n + 3)(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$

Remarque : dans ce cas, une rédaction directe conduirait à la forme indéterminée $\infty \times 0$.
Méthode : Pour lever l'indétermination, on développe puis on réduit.

$f_n = (-n + 3)(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) = -\frac{n}{n} + \frac{n}{n^2} + \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} = -1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} = -1 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}$

On en déduit, par somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = -1$.

Exercice 2 : Prise d'initiative.

L'iode 131 est très utilisée à petites doses dans l'imagerie médicale, par exemple en scintigraphie.

On souhaite étudier l'évolution au cours du temps du nombre de noyaux d'iode 131 présents dans un organisme humain, après une scintigraphie.

Statistiquement, le nombre de noyaux d'iode 131 contenu dans un organisme humain diminue chaque jour de 8,3 %.

Après injection, un organisme contient initialement 10^7 noyaux d'iodes 131.

Déterminer, en expliquant votre démarche, le nombre de jours nécessaires avant que le nombre de noyaux d'iode 131 présents dans l'organisme devienne inférieur à 1 (et soit ainsi considéré comme nul).

Modélisation du problème : Soit n un entier naturel.

On note u_n le nombre de noyaux au bout de n jours. Chaque jour, ce nombre diminue de 8,3 %.

On en déduit, le jour suivant : $u_{n+1} = u_n - \frac{8,3}{100} u_n = u_n - 0,083\, u_n = (1 - 0,083)\, u_n = 0,917\, u_n$

On reconnaît la formule de récurrence de la suite géométrique de raison $q = 0,917$ et de 1er terme $u_0 = 10^7$.

Puisque $u_0 = 10^7 > 0$ et $q = 0,917 \in]0;1[$, on sait que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

En utilisant le tableur de la calculatrice, on lit : $u_{186} \approx 1,002 > 1$ et $u_{187} \approx 0,9 < 1$.

On en déduit qu'il faut 187 jours à un organisme humain pour éliminer l'iode 131 injectée pour une scintigraphie

Remarque : De la formule de récurrence, on peut déduire la formule explicite suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 10^7 \times 0,917^n$$

On peut aussi résoudre le problème en utilisant l'un ou l'autre des algorithmes suivants :

```
N prend la valeur 0
U prend la valeur 10 000 000
Tant que U ≥ 1
    N prend la valeur N + 1
    U prend la valeur U × 0,917
Fin Tant Que
Afficher N
```

```
N prend la valeur 0
U prend la valeur 10 000 000
Tant que U ≥ 1
    N prend la valeur N + 1
    U prend la valeur 10 000 000 × 0,917^n
Fin Tant Que
Afficher N
```

Exercice 3 : Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région.
En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il prévoit d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

Partie A : Utilisation d'un algorithme

Variables :	N est un nombre entier naturel C est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0 Affecter à C la valeur 300
Traitement :	Tant que C < 400 faire N prend la valeur N + 1 C prend la valeur C – C × 0,08 + 50 Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

1. En suivant pas à pas les instructions de l'algorithme on complète le tableau suivant :

Valeur de N	0	1	2	3	4	5
Valeur de C	300	326	350	372	392	411
Test C < 400	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. On sort de la boucle « Tant que » lorsque C ≥ 400 et la valeur affichée par l'algorithme est N = 5.
Donc il faut 5 ans pour que le nombre de colonies d'abeilles atteigne ou dépasse 400.

Partie B : Modélisation de la situation à l'aide d'une suite définie par récurrence.

1. On modélise l'évolution du nombre de colonies d'abeilles à l'aide d'une suite (c_n).
Soit n un entier naturel quelconque. On note c_n le nombre de colonies pendant l'année 2014 + n.
En juillet 2014, l'apiculteur possédait 300 colonies d'abeilles. On pose alors : $c_0 = 300$.
Chaque année, 8 % des colonies sont perdues durant l'hiver et l'apiculteur en installe 50 nouvelles.
On pose alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n - 0{,}08\, c_n + 50 = (1 - 0{,}08)\, c_n + 50 = 0{,}92\, c_n + 50$.

2. On note $\mathscr{P}(n)$: « $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n < c_{n+1} < 625$ »

Initialisation :
$c_0 = 300$ et $c_1 = 326$ (d'après le tableau de la partie A).
Donc $c_0 < c_1 < 625$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que : $c_k < c_{k+1} < 625$
Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que : $c_{k+1} < c_{k+2} < 625$
Si $\mathscr{P}(k)$ est vraie alors : $c_k < c_{k+1} < 625$
$0{,}92\, c_k < 0{,}92\, c_{k+1} < 0{,}92 \times 625$
$0{,}92\, c_k + 50 < 0{,}92\, c_{k+1} + 50 < 575 + 50$
$c_{k+1} < c_{k+2} < 625$ Alors $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion :
$\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n < c_{n+1} < 625$
On en déduit que la suite (c_n) est croissante et majorée par 625 sur $\mathbb{N}$.

3. En utilisant le tableur de la calculatrice, on peut conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 625$.
La suite étant croissante et majorée par 625, cela signifierait que le nombre de colonies d'abeilles augmenterait, d'année en année, mais sans jamais dépasser 625.

Partie C : Détermination de la formule explicite de (c_n) à l'aide d'un raisonnement par récurrence

1. On note $\mathscr{P}(n)$: « $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n = 625 - 325 \times 0,92^n$ »

   Initialisation :
   $c_0 = 300$ et : $625 - 325 \times 0,92^0 = 625 - 325 \times 1 = 625 - 325 = 300$
   Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité :
   Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que : $c_k = 625 - 325 \times 0,92^k$
   Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que : $c_{k+1} = 625 - 325 \times 0,92^{k+1}$
   Si $\mathscr{P}(k)$ est vraie alors : $c_k = 625 - 325 \times 0,92^k$
   $0,92c_k = 0,92(625 - 325 \times 0,92^k)$
   $0,92c_k = 0,92 \times 625 - 0,92 \times 325 \times 0,92^k$
   $0,92c_k = 575 - 325 \times 0,92^{k+1}$
   $0,92c_k + 50 = 50 + 575 - 325 \times 0,92^{k+1}$
   $c_{k+1} = 625 - 325 \times 0,92^{k+1}$ Alors $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   Conclusion :
   $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.

2. c_n est le nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$.
   $c_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10} \approx 484$
   Ainsi, l'apiculteur peut espérer posséder 484 colonies d'abeilles en juillet 2024.

3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n = 625 - 325 \times 0,92^n$ donc : $c_{n+1} = 625 - 325 \times 0,92^{n+1}$
   On en déduit : $c_{n+1} - c_n = 625 - 325 \times 0,92^{n+1} - 625 + 325 \times 0,92^n$
   $c_{n+1} - c_n = -325 \times 0,92 \times 0,92^n + 325 \times 0,92^n$
   $c_{n+1} - c_n = 325 \times 0,92^n(-0,92 + 1)$
   $c_{n+1} - c_n = 0,08 \times 325 \times 0,92^n = 26 \times 0,92^n > 0$
   On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} > c_n$. La suite (c_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.

Partie D : Détermination de la formule explicite de (c_n) à l'aide d'une suite auxiliaire.

On rappelle que (c_n) est définie par : $c_0 = 300$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 0,92c_n + 50$
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 625 - c_n$.

1. On souhaite démontrer que (v_n) est géométrique. On peut conjecturer sa raison q à partir de v_0 et v_1.
   $v_0 = 625 - c_0 = 625 - 300 = 325$
   $v_1 = 625 - c_1 = 625 - 326 = 299$.
   On peut ainsi conjecturer : $q = \dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{299}{325} = 0,92$.
   On compare v_{n+1} et $q \times v_n$ pour tout entier naturel n :
   - D'une part : $v_{n+1} = 625 - c_{n+1} = 625 - (0,92\,c_n + 50) = 575 - 0,92\,c_n$
   - D'autre part : $0,92\,v_n = 0,92\,(625 - c_n) = 575 - 0,92\,c_n$
   - Donc : $v_{n+1} = 0,92\,v_n$

   On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de 1er terme $v_0 = 325$ et de raison $q = 0,92$.

   Méthode 2 :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 625 - c_{n+1} = 625 - (0,92\,c_n + 50) = 575 - 0,92\,c_n = 0,92\,(625 - c_n) = 0,92\,v_n$
   On en déduit que (v_n) est une la géométrique de 1er terme $v_0 = 325$ et de raison $q = 0,92$.

   Méthode 3 : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ car $c_n < 625$ et $v_n = 625 - c_n$.
   De plus : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{625-c_{n+1}}{625-c_n} = \dfrac{625-(0,92c_n+50)}{625-c_n} = \dfrac{575-0,92c_n}{625-c_n} = \dfrac{0,92(625-c_n)}{625-c_n} = 0,92$
   On en déduit que (v_n) est une la géométrique de 1er terme $v_0 = 325$ et de raison $q = 0,92$.

2. Puisque (v_n) est géométrique de 1er terme $v_0 = 325$ et de raison $q = 0,92$.
   Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 325 \times 0,92^n$
   Or : $v_n = 625 - c_n$ Donc : $c_n = 625 - v_n = 625 - 325 \times 0,92^n$

Exercice 4 : La suite u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{-}0,1u_n^2 + 2u_n$ permet de modéliser l'évolution, depuis 2010, du nombre de foyers français (en millions) possédant un téléviseur à écran plat.
u_n désigne le nombre de millions de foyers français équipés d'un écran plat, la n-ième année après 2010.

Partie A : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{-}0,1x^2 + 2x$.
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \text{-}0,2x + 2$.

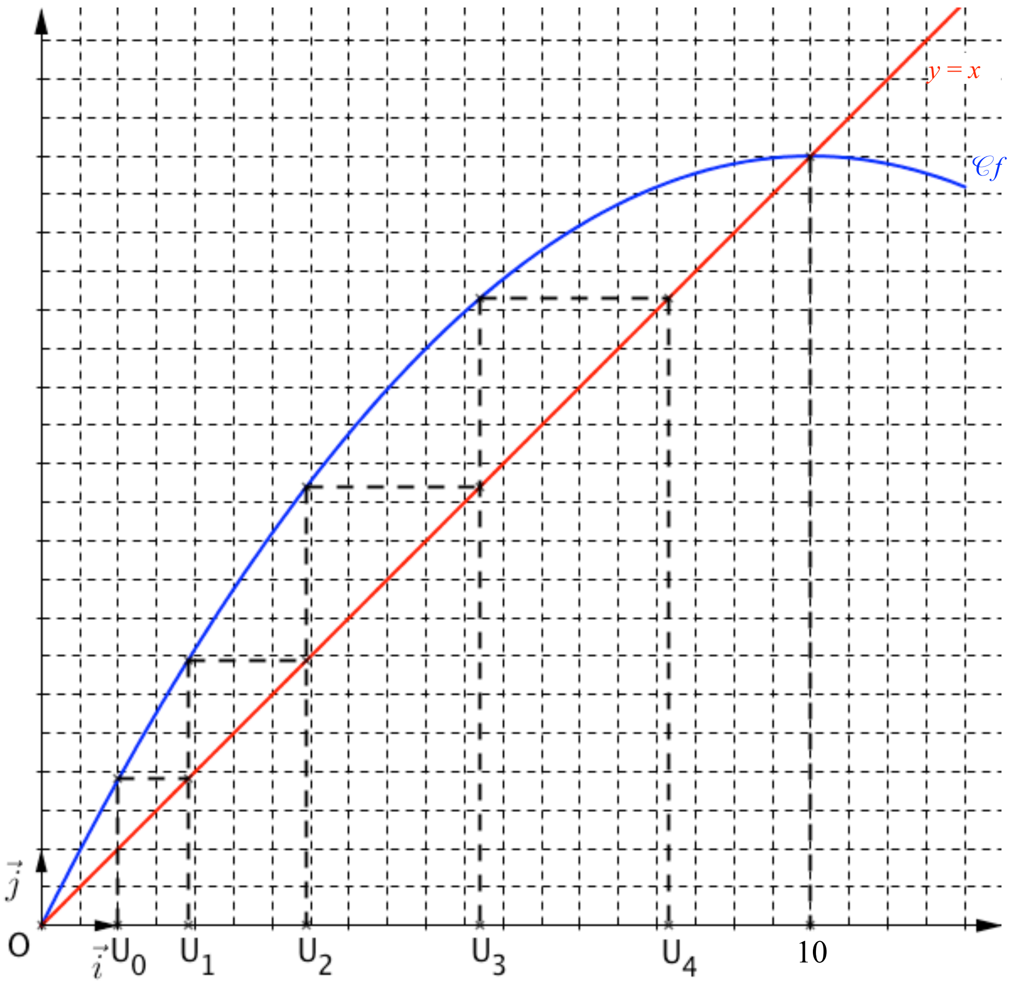
$\text{-}0,2x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{-}0,2x > \text{-}2 \quad \Leftrightarrow \quad x < \dfrac{2}{0{,}2} \quad \Leftrightarrow \quad x < 10$

$f(10) = \text{-}0,1 \times 10^2 + 2 \times 10 = \text{-}10 + 20 = 10$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-∞	10	+∞
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	$\nearrow$	10	$\searrow$

Partie B : Etude de la suite.



1. a) Construction des cinq premiers termes de la suite (u_n) ci-dessus.

   b) Graphiquement, la suite (u_n) semble croissante et convergente vers 10.

2. a) On note $\mathscr{P}(n)$: « $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} < 10$ »

Initialisation :
$u_0 = 1$
$u_1 = -0,1 \times 1^2 + 2 \times 1 = -0,1 + 2 = 1,9 < 10$
Donc $u_0 < u_1 < 10$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que : $u_k < u_{k+1} < 10$
Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que : $u_{k+1} < u_{k+2} < 10$
Si $\mathscr{P}(k)$ est vraie alors : $u_k < u_{k+1} < 10$
Puisque f est une fonction croissante sur $]-\infty\,;\,10]$, on en déduit :

$$f(u_k) < f(u_{k+1}) < f(10)$$

De plus, $f(10) = 10$ et pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = f(u_n)$. On en déduit :

$$u_{k+1} < u_{k+2} < 10 \qquad \text{Alors } \mathscr{P}(k+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion :
$\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} < 10$
On en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée par 10 sur $\mathbb{N}$.

b) (u_n) est croissante et majorée par 10 sur $\mathbb{N}$.
Cela signifie que le nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat augmente depuis 2010 mais ne dépassera pas 10 millions.

c) On souhaite écrire un algorithme qui permet de déterminer l'année à partir de laquelle l'écart entre le nombre de foyers français équipés d'un écran plat et 10 millions sera strictement inférieur à 1 000.
On peut utiliser la variable U pour désigner le terme de rang N de la suite.
Résoudre 10 000 000 – U < 1 000 revient à résoudre : U > 10 000 000 – 1 000
U > 9 999 999
U > 9,999 millions
Attention !!! Les premiers termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à 9,999.

Initialisation :	N prend la valeur 0 U prend la valeur 1
Traitement :	Tant que U ≤ 9,999 N prend la valeur N + 1 U prend la valeur $-0{,}1\,U^2 + 2\,U$ Fin tant que
Sortie :	Afficher N

L'algorithme donne N = 7.
2010 + 7 = 2017
Ce sera donc en 2017 que l'écart entre le nombre de foyers français équipés d'un écran plat et 10 millions sera strictement inférieur à 1 000.