Nom : **DS n°2** *Classe : TS…*

Prénom : le 18/10/2016

Compétences	*Acquis*	*En cours d'acquisition*	*Non acquis*
Prise d'initiative			
Maitrise des calculs			
Raisonnement par récurrence			
Détermination de limites			
Formules de géométrie			
Calcul vectoriel			
Droites coplanaires – Droites sécantes			
Droites orthogonales			
Intersection de plans-section d'un cube par un plan			
Justifier -Argumenter			

Barème	Ex n°1: 2 points	Ex n°2 : 4.5 points	Ex n°3 : 5 points	Ex n°4 : 8.5 points	Total : 20 points
Note de l'élève					

SUJET A INSERER DANS LA COPIE

Exercice n°1:

La suite (u_n) est définie sur IN par une relation de la forme $u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$

1. Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0=6$ et $u_1 = 6,6$
   En déduire que $u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$
2. Déterminer la limite de (u_n) en l'infini.

Exercice n°2:

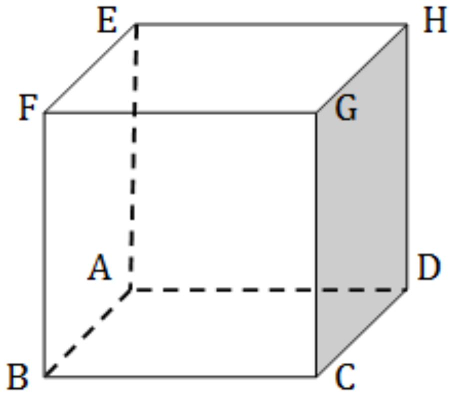
La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

1. A l'aide de votre calculatrice conjecturer les variations et la limite de la suite (u_n)
2. Soit f la fonction définie sur]-2 ; +∞ [par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}= f(u_n)$.
   a) Etudier les variations de la fonction f sur]-2 ;+∞[.
   b) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence les variations de la suite (u_n) et que la suite (u_n) est minorée par 1.
   c) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   d) Justifier que le réel ℓ vérifie $\frac{4\ell-1}{\ell+2} = \ell$ et déterminer la limite.

Exercice n°3:

On considère le cube ABCDEFGH et les points M, N et P définis par

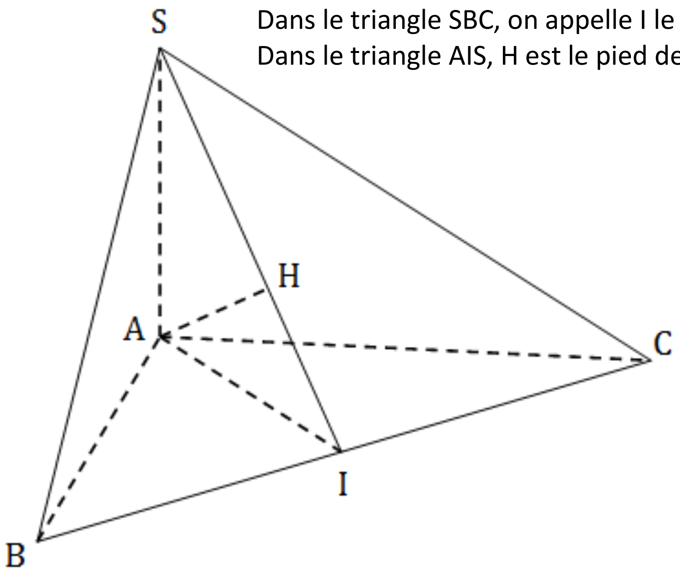
- M milieu de [BC]
- N point de [CD] tel que CN = $\frac{2}{3}$CD
- P point de [EH] tel que EP= $\frac{1}{4}$ EH



1. Les droites (MN) et (FH) sont-elles coplanaires ? Justifier
2. Justifier que les droites (MN) et (AD) sont sécantes en un point appelé L. Placer le point L.
3. Déterminer l'intersection des plans (MNP) et (ADE).Justifier
4. Déterminer l'intersection des plans (MNP) et (EFG).Justifier
5. Sur la figure ci-contre, tracer la section du plan (MNP) sur le cube.

Exercice n°4:

SABC est un tétraèdre tel que SAB, SAC et ABC sont des triangles rectangles en A .
De plus AS = AB = AC = a.
Dans le triangle SBC, on appelle I le pied de la hauteur issue de S
Dans le triangle AIS, H est le pied de la hauteur issue de A .



Partie A :

a) Quelle est la nature du triangle SBC ?
b) Démontrer que le plan (SAI) est le plan médiateur du segment [BC].
c) Démontrer que les droites (BC) et (AH) sont orthogonales
d) Démontrer que dans la pyramide SABC (AH) est la hauteur issue de A.

Partie B : Calcul de AH

a) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre SABC en fonction de a
b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle SBC en fonction de a
c) Exprimer AH en fonction de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{A}$, en déduire que AH = a$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Partie C :

Soit M le point tel que $\overrightarrow{SM} = 3\,\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA}$

a) Montrer que $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$. Placer le point M.
b) Montrer que M est un point de (SAI) .En déduire la nature du triangle MBC.

Exercice n°1 :

1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme $u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$

   $u_0=6 \Leftrightarrow \alpha(1,2)^0 + \beta(-0,2)^0 = 6 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 6$

   $u_1 = 6,6 \Leftrightarrow \alpha(1,2)^1+\beta(-0,2)^1 = 6,6 \Leftrightarrow \alpha(1,2) + \beta(-0,2) = 6,6$

   Résolvons le système suivant : $\begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ 1,2\alpha - 0.2\beta = 6,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,2\alpha - 1,2\beta = -7,2 \\ 1,2\alpha - 0,2\beta = 6,6 \end{cases}$

   Par addition des équations membre à membre

   $-1,4\beta = -0.6$

   $\beta = \frac{0,6}{1,4} = \frac{3}{7}$

   or $\alpha+\beta = 6$ donc $\alpha = 6 - \frac{3}{7} = \frac{39}{7}$ donc $\boxed{u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n}$

2. Etude de la limite de (u_n) en l'infini.

   $1,2 > 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} 1,2^n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{39}{7} 1,2^n = +\infty$

   $-1<-0,2 < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} (-0,2)^n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{7}(-0,2)^n = 0$

   Donc par somme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice n°2 :

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

1. D'après la calculatrice la suite (u_n) semble décroissante et converger vers 1.
2. **a.** La fonction est définie sur]-2 ; +∞ [par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ .f est une fonction rationnelle dérivable sur]-2 ; +∞ [.

   $f'(x) = \frac{4(x+2)-1(4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}$ sur]-2 ; +∞ [$(x+2)^2 > 0$ et $9 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

   donc la fonction f est strictement croissante sur]-2 ; +∞ [.

   b. Démontrons par récurrence que :$\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$. On pose P_n : « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

   (1) Initialisation : $u_0 = 5$ $u_1 = \frac{19}{7} \approx 2,7$

   Donc $1 \leq u_1 \leq u_0$ donc P_0 est vraie.

   (2) Hérédité

   On suppose que P_k est vraie pour un entier $k \geq 0$, démontrons que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire : $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$

   P_k est vraie $\Leftrightarrow$ $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$

   f est croissante sur]-2 ;+∞[

   $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$

   or $f(1) = 1$ donc $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ donc P_{k+1} et vraie

   donc la propriété est héréditaire.

   (3) Conclusion

   - P_0 est vraie
   - la propriété est héréditaire.

   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite est décroissante et minorée par 1.

   c. La suite est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers un réel ℓ, tel que $\ell \geq 1$.

d. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

et $\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty} 4u_n - 1 = 4\ell-1 \\ \lim_{n\to+\infty} u_n + 2 = \ell+2\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim_{n\to+\infty} \frac{4u_n-1}{u_n+2} = \frac{4\ell-1}{\ell+2}$

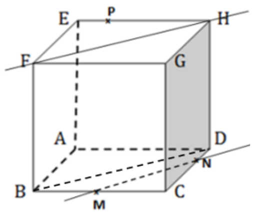
Or $u_{n+1} = \frac{4u_n-1}{u_n+2}$ donc $\ell = \frac{4\ell-1}{\ell+2}$.

$\ell = \frac{4\ell-1}{\ell+2} \Leftrightarrow \ell(\ell+2) = 4\ell-1 \Leftrightarrow \ell^2+2\ell = 4\ell-1 \Leftrightarrow \ell^2-2\ell+1=0 \Leftrightarrow (\ell-1)^2=0 \Leftrightarrow \ell-1=0 \Leftrightarrow \ell=1$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice n°3 :

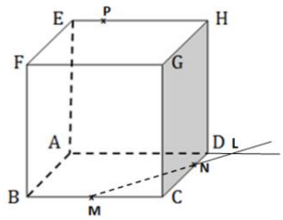
1.



- Dans le triangle BCD, les points C, M et B sont alignés dans le même ordre que C, N et D $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$ et $\frac{CN}{CD} = \frac{2}{3}$ donc $\frac{CM}{CB} \neq \frac{CN}{CD}$
  D'après la contraposée du théorème de Thalès
  les droites **(MN) et (BD) ne sont pas parallèles**.
- **[FH] et [BD]** sont deux diagonales opposées du cube donc elles sont **parallèles**.

Donc les droites <u>(MN) et (FH) ne sont pas parallèles.</u>

De plus elles sont dans deux plans parallèles et disjoints du cube donc elles n'ont

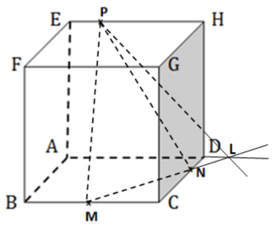


2.

$\left.\begin{array}{l}M\in [BC] \text{ et } (BC) \subset (ABC) \text{ donc } M\in(ABC) \\ N\in [CD] \text{ et } (CD) \subset (ABC) \text{ donc } N\in(ABC)\end{array}\right\}$ Donc $(MN) \subset (ABC)$

De plus $(AB) \subset (ABC)$ donc les droites (MN) et (AB) sont coplanaires.

(AD)//(BC) or $M\in(BC)$ et $N\notin(BC)$ donc les droites (MN) et (AD) sont sécantes en un point L.



3. $P\in [EH]$ et $(EH) \subset (ADE)$ donc $P\in(ADE)$ de plus $P\in(MNP)$ <u>donc $P\in(ADE) \cap (MNP)$</u>.

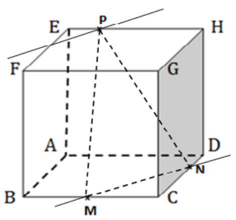
$M\in [BC]$ et $(BC) \subset (FBC)$ donc $M\in(FBC)$.

Or les plans (FBC) et (ADE) sont parallèles et disjoints donc $M\notin(ADE)$.

$M\in(MNP)$ et $M\notin(ADE)$ donc $M \notin (ADE) \cap (MNP)$.Donc les plans (ADE) et (MNP) ne sont pas Confondus. <u>Donc les deux plans sont sécants suivant une droite.</u>

$\left.\begin{array}{l}L\in(AD) \text{ et } (AD) \subset (ADE) \text{ donc } L\in(ADE) \\ L\in(MN) \text{ et } (MN) \subset (ADE) \text{ donc } L\in(MNP)\end{array}\right\}$ <u>Donc $L\in(ADE) \cap (MNP)$</u>

Conclusion :(ADE) et (MNP) sont sécants suivant la droite (PL)



4. $P\in[EH]$ et $(EH) \subset (EFG)$ donc $P\in(EFG)$ de plus $P\in(MNP)$ <u>donc $P\in(EFG) \cap (MNP)$</u>.

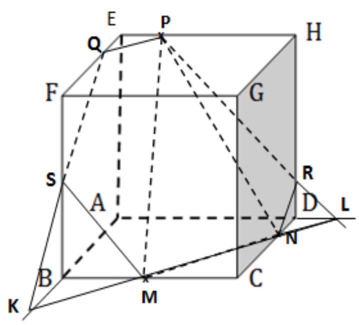
Dans le cube les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

De plus le plan (MNP) coupe le plan (ABC) suivant la droite (MN).

Or si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et leurs droites d'intersection sont parallèles (ou théorème d'incidence)

Donc le plan (MNP) coupe le plan (EFG) suivant une droite parallèle à (MN) qui passe par le point P.

5.



La droite (PL) coupe [HD] en R

La parallèle à (MN) passant par P coupe [EF] en Q

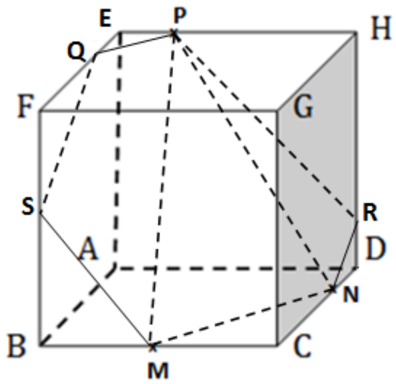
Pour terminer la section du cube par le plan (MNP), on trace la parallèle à (PR) passant M. Elle coupe [FB] en S.

Ou la parallèle à (NR) passant par Q, elle coupe [FB] en S

Ou bien on place le point K, intersection des droites (AB) et (MN). (QK) est la droite d'intersection des plans (MNP) et (ABF)

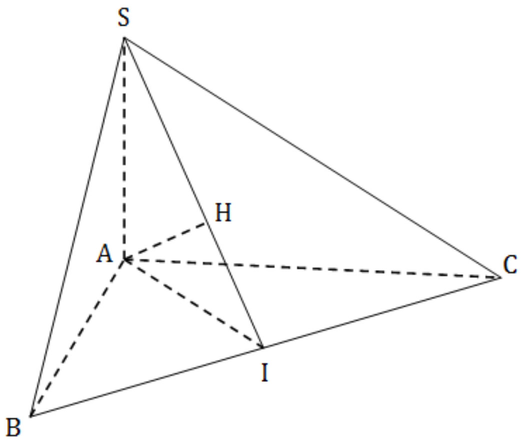
Elle coupe [FB] en S.

Enfin on trace le polygone MNRPQSM



Section du cube par le plan (MNP)

Exercice n°4 : Partie A



a. Les triangles ABS, ACS et ABC sont des triangles rectangles en A et isocèles tels que AS=AB=AC=a.
Leurs hypoténuses respectives [BS], [CS] et [BC] ont des longueurs égales et mesurent a$\sqrt{2}$. (Les triangles SAB, SAC et ABC sont des « demi carrés »)
Donc le triangle SBC est équilatéral.

b. Dans le triangle SBC équilatéral, I est le pied de la hauteur issue de S. La hauteur (SI) est aussi médiane. Donc I est le milieu de [BC]
Le plan médiateur du segment [BC] est l'ensemble des points équidistants des points B et C.

- I est le milieu du segment [BC] donc IB=IC
- Le triangle SBC est un triangle équilatéral donc SB=SC
- Le triangle ABC est isocèle en A donc AB=AC

Les points A, S et I sont équidistants des points B et C, de plus ne sont pas alignés. Ils définissent donc un plan, c'est le plan médiateur du segment [BC]

Ou bien : Démontrons que (SAI) est perpendiculaire au segment [BC], et coupe [BC] en son milieu I

- I est le milieu de [BC] et I$\in$ (SAI)
- Dans le triangle SBC, I est le pied de la hauteur issue de S. Donc (SI) $\perp$(BC)
  Dans le triangle (ABC) isocèle en A, (AI) est la médiane issue de A et donc la hauteur issue de A
  Donc (AI) $\perp(BC)$.
  (SI)$\perp$(BC) et (AI) $\perp(BC)$ donc la droite (BC) est orthogonale à deux droites sécantes en I du plan (SAI).
  Donc (BC) est perpendiculaire au plan (SAI).
- **Conclusion** : (SAI) est perpendiculaire au segment [BC], et coupe [BC] en son milieu I. Donc (SAI) est le plan médiateur du segment [BC]

c. La droite (BC) est perpendiculaire au plan (SAI) donc elle est orthogonale à tout droite du plan (SAI)
Dans le triangle AIS, H est le pied de la hauteur issue de A.
Donc le point H $\in$(SI) , (SI) $\subset$ (SAI) donc H $\in$(SAI), d'où la droite (AH) est une droite du plan (SAI)
donc (BC) est orthogonale à (AH).

d. La droite (AH) est la hauteur de la pyramide issue de A si et seulement si la droite (AH) est perpendiculaire à la face opposée SBC.

- Dans le triangle AIS, H est le pied de la hauteur issue de A. Donc (AH) est perpendiculaire à (SI) .
- (BC) est orthogonale à (AH).

Donc la droite (AH) est orthogonale à (BC) et à (SI), deux droites sécantes du plan (SBC) .Elle est donc perpendiculaire au plan (SBC).Donc la droite (AH) est la hauteur de la pyramide issue de A.

Partie B :

a. Le tétraèdre SABC peut-être considéré comme la pyramide de base ABC et de hauteur (AS) .En effet par hypothèse $(SA) \perp (AC)$ et $(SA) \perp (AB)$ donc (SA) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc (SA) est perpendiculaire au plan (ABC).

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \text{ base x hauteur } = \frac{1}{3} \text{ x aire}_{ABC} \text{ x} SA = \frac{1}{3} \text{ x } \frac{a\text{x}a}{2} \text{ x } a = \frac{1}{6} a^3 .$$

b. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}$ basexhauteur = $\frac{1}{2}$ BCxSI

D'après la partie A. BC $= a\sqrt{2}$, SI est une médiane du triangle SBC équilatéral de côté BC

Donc SI = BCx$\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{2}\text{x}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (sinon on applique le théorème de Pythagore dans le triangle SIC rectangle en I)

Formule de cours

On en déduit, SI = ax$\frac{\sqrt{6}}{2}$. D'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \text{x} a\sqrt{2} \text{x } a\text{x}\frac{\sqrt{6}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\mathcal{V} = \frac{1}{3}$ base x hauteur $= \frac{1}{3}$ x aire$_{SBC}$ x AH $\Leftrightarrow \mathcal{V} = \frac{1}{3}$ x $\mathcal{A}$ x AH $\Leftrightarrow 3\,\mathcal{V} = \mathcal{A}$ x AH $\Leftrightarrow$ AH $= \frac{3\,V}{A}$

donc $AH = \dfrac{3\text{x}\frac{1}{6}a^3}{a^2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a^3\text{x}\frac{1}{2}}{a^2\text{x}\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\text{x}\,\frac{1}{2}\text{x}\frac{2}{\sqrt{3}} = a\text{x}\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $AH = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Partie C : a.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{SM} = 3\,\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{SM} = 3(\,\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SI}) + 2\overrightarrow{IA}$ *d'après la relation de CHASLES*

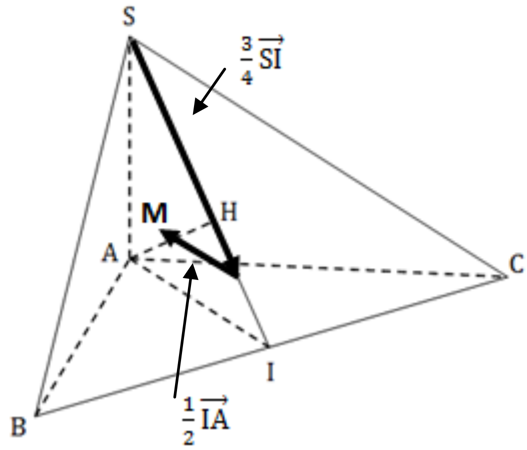
$\overrightarrow{SM} = 3\,\overrightarrow{MS} + 3\overrightarrow{SI} + 2\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{SM} - 3\,\overrightarrow{MS} = 3\overrightarrow{SI} + 2\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{SM} + 3\,\overrightarrow{SM} = 3\overrightarrow{SI} + 2\overrightarrow{IA}$

$4\,\overrightarrow{SM} = 3\overrightarrow{SI} + 2\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{SM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$



b. $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (SAI) ,

Donc les vecteurs $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont coplanaires.

De plus ces trois vecteurs ne sont formés que des 4 points S, M, I et A

Donc S, M, I et A sont coplanaires. Donc M∈(SAI)

D'après la partie A.b. (SAI) est le plan médiateur du segment [BC]

Donc tout point de (SAI) est équidistant des points B et C

M∈(SAI), donc MB=MC et le triangle MBC est isocèle en M.