Nom : *Classe* : T ES	**Devoir surveillé n°2** le 02/11/2015	*Note* : … / 20

La notation du devoir prendra en compte les efforts de soin, de présentation et de rédaction.
Une fois que vous aurez fini ce devoir vous complèterez la grille d'autoévaluation suivante.

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Exercice 1				
Calculer des images.				
Construire la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé.				
Justifier si une fonction est continue ou non.				
Exercice 2				
Dériver des fonctions.				
Exercice 3				
Calculer les premiers termes d'une suite.				
Compléter un algorithme / Déterminer le résultat affiché.				
Démontrer qu'une suite est géométrique.				
Déterminer la formule explicite d'une suite.				
Etudier le sens de variation d'une suite / Interpréter le résultat.				
Déterminer la limite d'une suite / Interpréter le résultat.				
Ecrire un algorithme / Déterminer un seuil.				

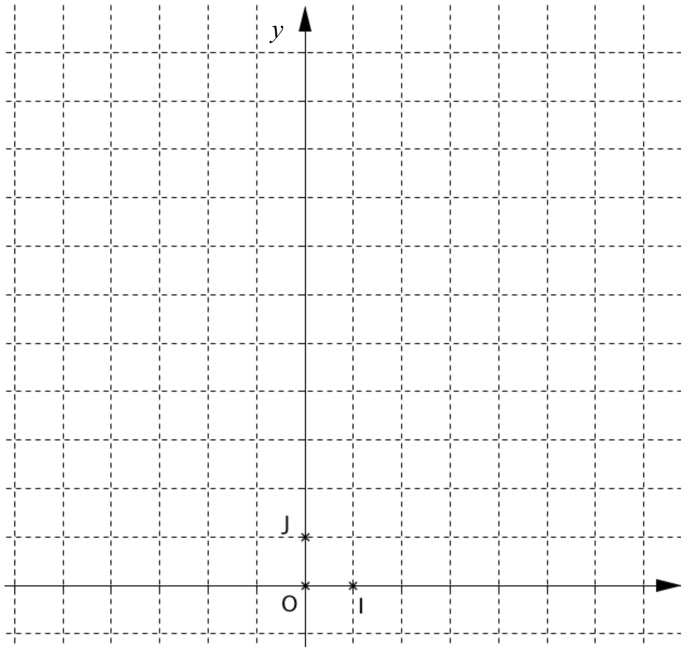
Exercice 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : **… / 5**

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+3 \text{ si } x\in]-\infty\ ;\ 2[\\ x^2-4x+5 \text{ si } x\in[2\ ;+\infty[\end{cases}$$

On note $\mathscr{C}f$ sa représentation graphique.

1) a) Détaille les calculs de $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(5)$. (2,5 point)

b) Déduis-en la construction de $\mathscr{C}f$ dans le repère orthonormé (O,I,J) ci-dessous. (1,5 point)



2) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifie graphiquement. (0,5 point)

3) Justifie, à l'aide d'une propriété du cours, que f est continue sur $[2\ ;+\infty]$. (0,5 point)

Exercice 2 : Calcule les dérivées des fonctions suivantes. **… / 5**

a) $f(x)=3x^2-4x-5+\dfrac{2}{x}+3\sqrt{x}$ (1,5 point)

b) $g(x)=(-3x+7)(5x-1)$ (1,5 point)

c) $h(x)=\dfrac{x^2+3x-7}{x+4}$ (2 points)

<u>Exercice 3</u> : Lutte contre la déforestation. **… / 10**

<u>Partie A</u>

Le 1^{er} janvier 2 010, une forêt comptait 5 000 arbres mais depuis, chaque année, 5 % des arbres sont abattus.
On modélise le nombre d'arbres dans cette forêt à l'aide d'une suite (u_n).
Pour tout entier naturel n, le terme u_n désigne le nombre d'arbres restants au 1er janvier de l'année 2 010 + n.
On a ainsi $u_0 = 5\ 000$.

1) Combien la forêt comptait-elle d'arbres :
   a) Au 1er janvier 2011 ? (0,5 point)
   b) Au 1er janvier 2012, en arrondissant à l'entier ? (0,5 point)

2) Justifie que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 5000 \times 0{,}95^n$. (0,5 point)

3) On souhaite déterminer, à l'aide de algorithme ci-dessous, au bout de combien d'années après 2010 le nombre d'arbres restants sera inférieur à 3 000.
   a) Complète l'algorithme. (1 point)

```
Variables
    U un réel, N un entier naturel
Initialisations
    N prend la valeur 0
    U prend la valeur 5 000
Traitement
    Tant que ...........
        N prend la valeur ...........
        U prend la valeur ...........
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher N
```

   b) Donne, en justifiant, la valeur affichée en fin d'algorithme. (0,5 point)

<u>Partie B</u>

Au 1er janvier 2015, la forêt ne comptait plus que 3 869 arbres. Un organisme régional à alors décidé de replanter chaque année 300 arbres afin de lutter contre la déforestation.
On modélise le nombre d'arbres dans la forêt à l'aide d'une nouvelle suite (v_n).
Pour tout entier naturel n, le terme v_n donne le nombre d'arbres au 1er janvier de l'année 2 015 + n.
On a ainsi $v_0 = 3\ 869$.

1) a) Calcule v_1 et v_2 à l'unité près. Interprète les résultats obtenus. (1 point)
   b) Justifie que pour tout entier naturel n on a : $v_{n+1} = 0{,}95\ v_n + 300$ (0,5 point)

2) Soit w_n la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 6\ 000$
   a) Démontre que la suite w_n est une suite géométrique de raison 0,95. (1 point)
   Précise la valeur de w_0. (0,5 point)

   b) Pour tout nombre entier naturel n, exprime w_n puis v_n en fonction de n. (1 point)

   c) Etudie le sens de variation de la suite (v_n) et interprète le résultat obtenu. (1 point)

   d) Etudie la limite de la suite (v_n) et interprète le résultat obtenu. (1 point)

3) Détermine, à l'aide d'un algorithme que tu préciseras, au bout de combien d'années après 2015 le nombre d'arbres dans la forêt dépassera celui de 2010. (1 point)

Correction du DS n°2

Exercice 1 : f est la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+3 \text{ si } x\in]-\infty\ ;\ 2[\\ x^2-4x+5 \text{ si } x\in[2\,;+\infty[\end{cases}$$

On note $\mathscr{C}f$ sa représentation graphique.

1) a) Détaille les calculs de $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(5)$.

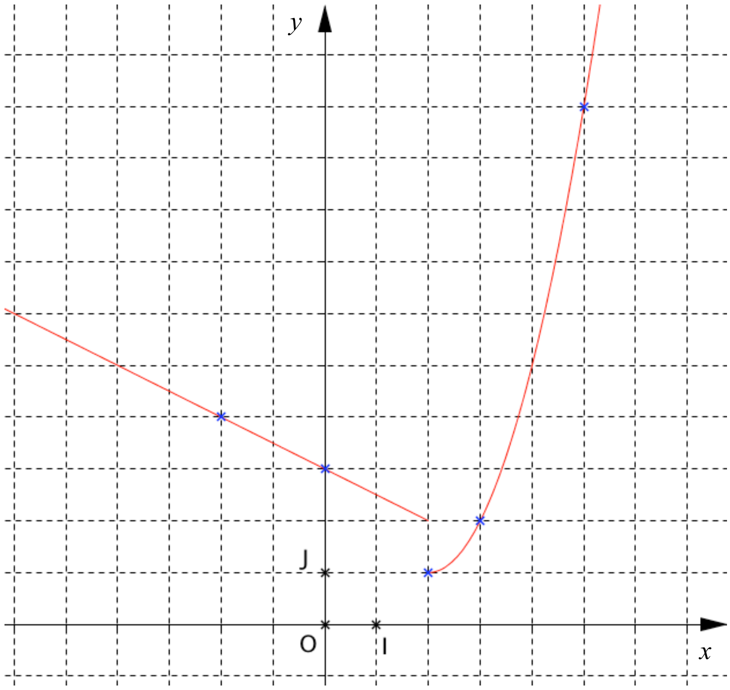
-2 et 0 appartiennent à]-∞ ; 2[donc :

- $f(-2)=-\frac{1}{2}\times(-2)+3=1+3=4$
- $f(0)=-\frac{1}{2}\times 0+3=0+3=3$

2, 3 et 5 appartiennent à [2 ; +∞[donc :

- $f(2)=2^2-4\times 2+5=4-8+5=1$
- $f(3)=3^2-4\times 3+5=9-12+5=2$
- $f(5)=5^2-4\times 5+5=25-20+5=10$

b) Déduis-en la construction de $\mathscr{C}f$ dans le repère orthonormé (O,I,J) ci-dessous.



2) a) La fonction f est-elle continue sur ℝ ? Justifie graphiquement.

La fonction f n'est pas continue sur ℝ car on ne peut pas tracer sa représentation graphique sans lever le crayon en $x = 2$.

b) Justifie, à l'aide d'une propriété du cours, que f est continue sur [2 ; +∞].

$\forall\, x \in [2\ ;+\infty[,\ f(x) = x^2 - 4x + 5$

La fonction f est dérivable sur [2 ; +∞[, en tant que fonction polynôme du 2nd degré. Donc f est dérivable sur [2 ; +∞[.

Exercice 2 : Calcule les dérivées des fonctions suivantes.

a) $f(x)=3x^2-4x-5+\frac{2}{x}+3\sqrt{x}$

f est dérivable sur]0 ; +∞[.

$f'(x)=2\times 3x-4+2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)+3\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=6x-4-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $g(x)=(-3x+7)(5x-1)=u(x)v(x)$

g est dérivable sur ℝ en tant que produit de fonctions affines.

$g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

avec : $\begin{cases} u(x)=-3x+7 \\ v(x)=5x-1 \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x)=-3 \\ v'(x)=5 \end{cases}$

$g'(x)=-3(5x-1)+5(-3x+7)$

$g'(x)=-15x+3-15x+35$

$g'(x)=-30x+38$

c) $h(x)=\frac{x^2+3x-7}{x+4}=\frac{u(x)}{v(x)}$

h est dérivable sur ℝ\{-4} en tant que fonction rationnelle définie sur ℝ\{-4}.

$h'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$\begin{cases} u(x)=x^2+3x-7 \\ v(x)=x+4 \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x)=2x+3 \\ v'(x)=1 \end{cases}$

$h'(x)=\frac{(2x+3)(x+4)-(x^2+3x-7)}{(x+4)^2}$

$h'(x)=\frac{2x^2+8x+3x+12-x^2-3x+7}{(x+4)^2}$

$h'(x)=\frac{x^2+8x+19}{(x+4)^2}$

Exercice 3 : Lutte contre la déforestation.

Partie A

Le 1er janvier 2 010, une forêt comptait 5 000 arbres mais depuis, chaque année, 5 % des arbres sont abattus.
On modélise le nombre d'arbres dans cette forêt à l'aide d'une suite (u_n).
Pour tout entier naturel n, le terme u_n désigne le nombre d'arbres restants au 1er janvier de l'année 2 010 + n.
On a ainsi $u_0 = 5\,000$.

1) Combien la forêt comptait-elle d'arbres :

a) Au 1er janvier 2011 ?

$$u_1 = u_0 - \frac{5}{100} u_0 = 5\,000 - \frac{5}{100} \times 5000 = 5\,000 - 250 = 4\,750$$

La forêt comptait 4 750 arbres au 1er janvier 2011.

b) Au 1er janvier 2012, en arrondissant à l'entier ?

$$u_2 = u_1 - \frac{5}{100} u_1 = 4\,750 - \frac{5}{100} \times 4\,750 = 4\,750 - 237{,}5 = 4\,512{,}5 \approx 4\,513$$

La forêt comptait 4 513 arbres au 1er janvier 2012.

2) Justifie que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 5000 \times 0{,}95^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100} u_n = \left(1 - \frac{5}{100}\right) u_n = \frac{95}{100} u_n = 0{,}95\, u_n$$

On reconnaît la formule de récurrence associée à la suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de 1er terme $u_0 = 5\,000$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 5\,000 \times 0{,}95^n$$

3) On souhaite déterminer, à l'aide de algorithme ci-dessous, au bout de combien d'années après 2010 le nombre d'arbres restants sera inférieur à 3 000.

a) Complète l'algorithme.

```
Variables
    U un réel, N un entier naturel
Initialisations
    N prend la valeur 0
    U prend la valeur 5 000
Traitement
    Tant que U ≥ 3 000
        N prend la valeur N + 1
        U prend la valeur 5000 × 0,95^N
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher N
```

b) Donne, en justifiant, la valeur affichée en fin d'algorithme.

On peut justifier à l'aide d'un tableau, en suivant les instructions de l'algorithme étape par étape :

Valeurs de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeurs de U	5 000	4 750	4 513	4 287	4 073	3 869	3 675	3 492	3 317	3 151	2 994
U < 3 000	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux	Vrai

Dans l'algorithme, on sort de la boucle lorsque U est inférieur à 3 000. La valeur affichée est N = 10.
Remarque : Cela signifie que si rien ne change, la forêt comptera moins de 3 000 arbres 10 ans après 2 010. C'est-à-dire en 2 020.

Partie B

Au 1[er] janvier 2015, la forêt ne comptait plus que 3 869 arbres. Un organisme régional à alors décidé de replanter chaque année 300 arbres afin de lutter contre la déforestation.

On modélise le nombre d'arbres dans la forêt à l'aide d'une nouvelle suite (v_n).

Pour tout entier naturel n, le terme v_n donne le nombre d'arbres au 1[er] janvier de l'année 2 015 + n.

On a ainsi $v_0 = 3\,869$.

1) a) Calcule v_1 et v_2 à l'unité près. Interprète les résultats obtenus.

$v_1 = 0{,}95\,v_0 + 300 = 0{,}95 \times 3\,869 + 300 \approx 3\,976$

La forêt comptera 3 976 arbres au 1[er] janvier 2016.

$v_2 = 0{,}95\,v_1 + 300 \approx 0{,}95 \times 3976 + 300 \approx 4\,077$

La forêt comptera 4 077 arbres au 1[er] janvier 2017.

b) Justifie que pour tout entier naturel n on a : $v_{n+1} = 0{,}95\,v_n + 300$

v_n donne le nombre d'arbres au 1[er] janvier de l'année 2 015 + n.

v_{n+1} donne le nombre d'arbres au 1[er] janvier de l'année suivante.

D'une année à l'autre, 5 % des arbres sont abattus et un organisme en replante 300.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - \frac{5}{100} v_n + 300 = (1 - \frac{5}{100}) v_n + 300 = \frac{95}{100} v_n + 300 = 0{,}95\,v_n + 300$

2) Soit w_n la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 6\,000$

a) Démontre que la suite w_n est une suite géométrique de raison 0,95.

Précise la valeur de w_0.

Pour tout entier naturel n on a :

- D'une part : $w_{n+1} = v_{n+1} - 6\,000 = 0{,}95\,v_n + 300 - 6\,000 = 0{,}95\,v_n - 5\,700$
- D'autre part : $0{,}95\,w_n = 0{,}95\,(v_n - 6\,000) = 0{,}95\,v_n - 5\,700$

Donc : $w_{n+1} = 0{,}95\,w_n$

On en déduit que w_n est une suite géométrique de raison 0,95.

$w_0 = v_0 - 6\,000 = 3\,869 - 6\,000 = -2131$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprime w_n puis v_n en fonction de n.

Puisque w_n est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $w_0 = -\,2131$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times q^n = -2131 \times 0{,}95^n$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - 6000$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = w_n + 6000 = -2\,131 \times 0{,}95^n + 6\,000$

c) Etudie le sens de variation de la suite (v_n) et interprète le résultat obtenu.

Puisque w_n est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de premier terme $w_0 = -\,2131$.

Alors la suite w_n est croissante sur $\mathbb{N}$.

Soient n et p deux entiers naturels quelconques.

Si : $n < p$

Alors : $w_n < w_p$ (Comme la suite w_n est croissante sur $\mathbb{N}$ l'inégalité ne change pas de sens)

Donc : $w_n + 6000 < w_p + 6000$

Donc : $v_n < v_p$

v_n et v_p sont rangés dans le même ordre que n et p donc la suite v_n est croissante sur $\mathbb{N}$.

d) Etudie la limite de la suite (v_n) et interprète le résultat obtenu.

$0{,}95 \in]0\,;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\,131 \times 0{,}95^n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -2\,131 \times 0{,}95^n + 6\,000 = 6\,000$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 6\,000$

Ainsi, au bout d'un très grand nombre d'années le nombre d'arbres dans la forêt tendra vers 6 000.

3) Détermine, à l'aide d'un algorithme que tu préciseras, au bout de combien d'années après 2015 le nombre d'arbres dans la forêt dépassera celui de 2010.

En 2010 la forêt comptait 5 000 arbres. On cherche le rang n à partir duquel v_n dépasse 5 000 sachant que $v_0 = 3\,869$.

On utilise l'algorithme suivant :

Variables
V un réel, N un entier naturel
Initialisations
N prend la valeur 0
V prend la valeur 3 869
Traitement
Tant que V ≤ 5 000
N prend la valeur N + 1
V prend la valeur $- 2\,131 \times 0{,}95^N + 6\,000$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

La valeur affichée en sortie est N = 15.

Le tableur de la calculatrice permet de vérifier avec $v_{14} \approx 4\,961 \leq 5\,000$ et $v_{15} \approx 5\,013 > 5\,000$.

Cela signifie que 15 ans après 2 015, la forêt comptera plus d'arbres qu'en 2 010.