

Nom :

DS n°2

Classe : TS...

Prénom :

le 16/10/2017

Compétences	Acquis	En cours d'acquisition	Non acquis
Prise d'initiative			
Maîtrise des calculs			
Raisonnement par récurrence			
Détermination de limites			
Formules de géométrie			
Calcul vectoriel			
Droites coplanaires – Droites sécantes			
Droites orthogonales			
Intersection de plans-section d'un cube par un plan			
Justifier -Argumenter			

Exercice	Ex n°1: EC	Ex n°2	Ex n°3	Ex n°4	Total
Barème	3 points	8 points	4 points	5 points	20 points
Note de l'élève					

SUJET A INSERER DANS LA COPIE

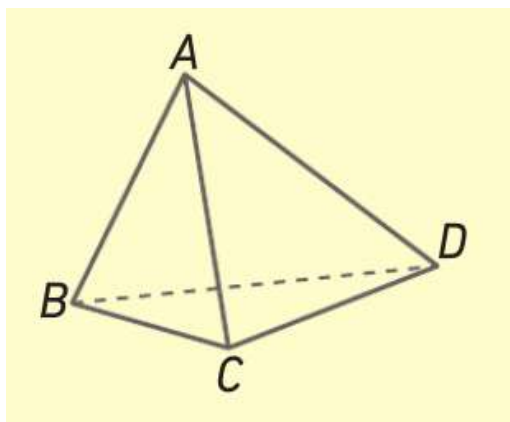
Exercice n°1 :

On considère un tétraèdre ABCD.

Partie 1 : EC

Sur la figure ci-dessous, placer le point I milieu de [BC], le centre de gravité G de la face BCD et le point

M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$.



Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires

Partie 2

Dans cette partie on suppose que le tétraèdre ABCD est régulier.

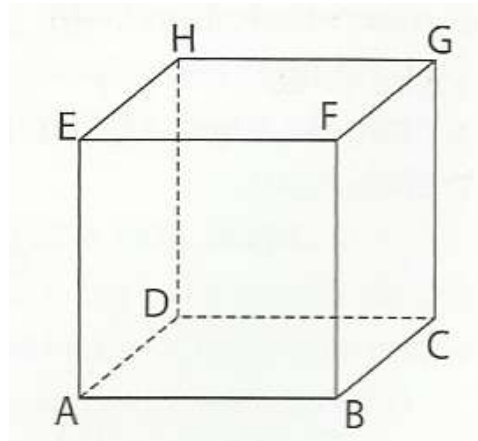
1. Démontrer que le plan (AID) est le plan médiateur du segment [BC].
2. Quelle est la nature du triangle MBC ?

Exercice n°2 :

ABCDEFGH est un cube d'arête 6 .

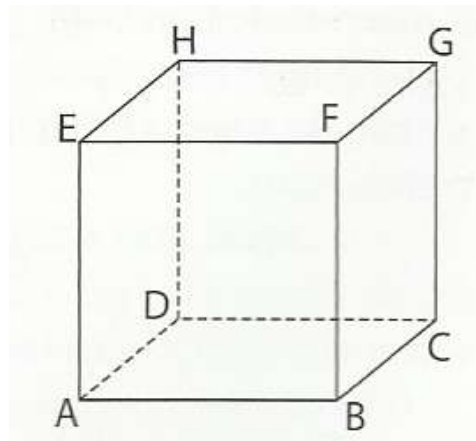
Partie 1 :

1. Démontrer que les droites (DH) et (EG) sont orthogonales
2. En déduire que les droites (DF) et (EG) sont orthogonales
3. On admet que (DF) est orthogonale à (EB).
En déduire que (DF) est une hauteur de la pyramide EGBF.
4. La droite (DF) coupe le plan (EGB) en un point T. T est-il le milieu du segment [DF] ?

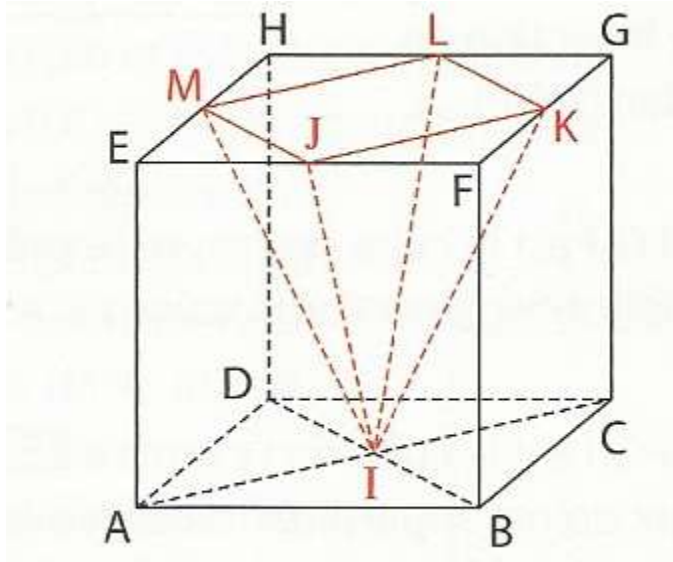
**Partie 2**

Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AE], [AB], [BC] et [CG]. Compléter la figure ci-dessous.

- a. Montrer que ACLI est un parallélogramme
- b. Démontrer que les droites (JK) et (LI) sont parallèles.
- c. En déduire que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point M que vous tracerez.
- d. Montrer que M appartient à la droite (BF).
- e. Tracer en vert la section du cube par le plan (IJL) dans la figure ci-dessous. On ne justifiera pas la construction.



Exercice n°3



ABCDEFGH est un cube de côté ℓ
 I, J, K, L et M sont les milieux respectifs de
 [AC],[EF],[FG],[HG] et [EH].

1. Exprimer en fonction de ℓ , le volume de la pyramide IJKLM.
2. Les plans (MJI) et (LIK) sont sécants suivant la droite (DB). Justifier.
3. Quelle est l'intersection des plans (MLI) et (JIK) ? (on ne justifiera pas)
4. Quelle est l'intersection des quatre plans (MJI) , (LIK), (MLI) et (JIK) ?

Exercice n°4

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Objectif : Démontrer que lorsque $q > 1$, la limite de (q^n) en l'infini est égale à $+\infty$.

$q > 1$ donc il existe un réel α tel que $q = \alpha + 1$. On admet que pour tout entier naturel n , $q^n \geq 1 + n\alpha$.

En déduire la limite de (q^n) en $+\infty$.

Partie B : On définit :

- La suite (u_n) par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$;
- La suite (S_n) par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ pour tout entier naturel n .

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

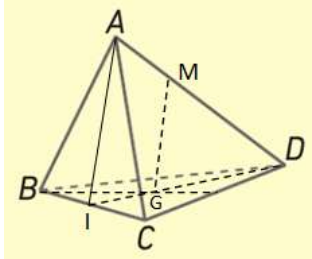
En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n) .
3. **Objectif :** Calculer la valeur d'un terme S_n pour une valeur de n donnée.
 - a) Déterminer un algorithme affichant la valeur d'un terme S_n pour une valeur de n donnée .
 - b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $S_n = n + 1 + 15(1 - (\frac{1}{5})^{n+1})$.
 - c) Déterminer la limite de la suite (S_n) .

Exercice n°1 : On considère un tétraèdre ABCD.

Partie 1 : EC : Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires

Le point I est le milieu de [BC], G est le centre de gravité de la face BCD et le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \text{ donc } \overrightarrow{MD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

De plus G est le centre de gravité du triangle BCD, donc $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \text{ donc } \overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires.

Partie 2 : Dans cette partie on suppose que le tétraèdre ABCD est régulier.

1. Démontrer que le plan (AID) est le plan médiateur du segment [BC].

Première méthode : ■ Les points A, I et D ne sont pas alignés donc ils définissent un plan.

■ I est le milieu de [BC] donc IB = IC

■ le tétraèdre ABCD est régulier donc les triangles ABC et BCD sont des triangles équilatéraux donc AB = AC et DB = DC.

Donc les 3 points A, I et D sont équidistants des points B et C. Donc (AID) est le plan médiateur du segment [BC].

Deuxième méthode : Démontrons que (AID) est un plan perpendiculaire à [BC] en son milieu.

■ I est le milieu de [BC].

■ le tétraèdre ABCD est régulier donc les triangles ABC et BCD sont des triangles équilatéraux.

Dans le triangle ABC, I est le milieu de [BC]. (AI) est la médiane issue de A elle est aussi la hauteur issue de A donc (AI) $\perp$ (BC).

Dans le triangle DBC, I est le milieu de [BC]. (DI) est la médiane issue de D elle est aussi la hauteur issue de D donc (DI) $\perp$ (BC).

(BC) est orthogonale aux 2 droites (AI) et (DI) sécantes en I. Donc (BC) $\perp$ (AID)

Donc (AID) est le plan médiateur du segment [BC].

2. Quelle est la nature du triangle MBC ?

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, avec le point A en commun, donc les points A, M et D sont alignés.

$M \in (AD)$ et $(AD) \subset (ADI)$ donc $M \in (ADI)$. (ADI) est l'ensemble des points équidistants des points B et C donc BM = CM. Donc le triangle MBC est isocèle en M.

Exercice n°2 : ABCDEFGH est un cube d'arête 6.

Partie 1 :

1. Démontrer que les droites (DH) et (EG) sont orthogonales

Dans le cube ABCDEFGH

$$(DH) \perp (EH) \text{ et } (DH) \perp (HG)$$

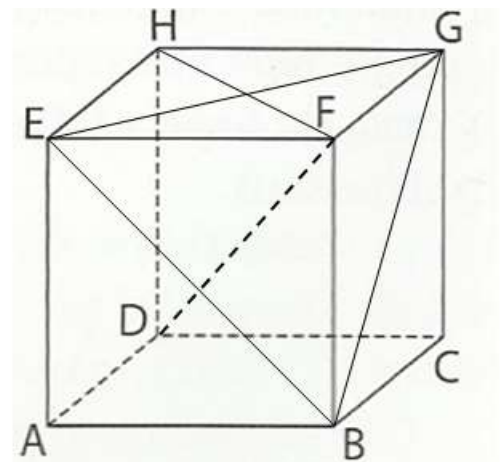
De plus les droites (DH) et (HG) sont sécantes en H.

Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est perpendiculaire au plan

Donc (DH) $\perp$ (EHG)

De plus (EG) $\subset$ (EHG)

Or si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toute droite du plan. Donc (DH) $\perp$ (EG)



2. En déduire que les droites (DF) et (EG) sont orthogonales

Dans le cube ABCDEFGH, EFGH est un carré.

Ses diagonales sont perpendiculaires. Donc (HF) $\perp$ (EG) }
De plus d'après le 1. (DH) $\perp$ (EG) }

Les droites (HF) et (DH) sont sécantes en H, on en déduit que (EG) $\perp$ (DHF).

De plus (DF) $\subset$ (DHF) donc (EG) $\perp$ (DF).

3. On admet que (DF) est orthogonale à (EB). En déduire que (DF) est une hauteur de la pyramide EGBF.

$(DF) \perp (EB)$ et $(EG) \perp (DF)$, de plus les droites (EB) et (EG) sont sécantes en E donc $(DF) \perp (EBG)$

Dans la pyramide EGBF, (DF) est perpendiculaire à la base EBG, opposée au point F. Donc (DF) est une hauteur de la pyramide.

4. La droite (DF) coupe le plan (EBG) en un point T. T est-il le milieu du segment [DF] ?

Première méthode : Raisonnons par l'absurde. Supposons que T est le milieu de [DF]. (DF) étant perpendiculaire à (EBG) alors le plan (EBG) est le plan médiateur du segment [DF].

$E \in (EBG)$. Le point E est-il équidistant des points D et F ?

[EF] est une arête du cube donc $EF=6$. [ED] est une diagonale du carré ADHE de côté 6 donc $ED=6\sqrt{2}$.

Donc $EF \neq ED$. Donc E n'appartient pas au plan médiateur du segment [DF]. Donc T n'est pas le milieu de [DF].

Deuxième méthode : Si T est le milieu de [DF], alors T est le centre du cube, il est aussi le milieu de [HB].

Or la droite (HB) est sécante au plan (EBG) en B et non en T. Donc T ne peut pas être le milieu de [DF].

Partie 2 : Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AE], [AB], [BC] et [CG].

a. Montrer que ACLI est un parallélogramme.

Première méthode :

Dans le cube ABCDEFGH les arêtes [EA] et [GC] sont parallèles et de même longueur donc $(EA) \parallel (GC)$ et $EA=GC$.

Or I est le milieu [AE] et L est le milieu de [CG] donc $(AI) \parallel (CL)$ et $AI = \frac{1}{2} AE$, $CL = \frac{1}{2} CG$ donc $AI = CL$.

Or un quadrilatère dont 2 côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

Donc ACLI est un parallélogramme.

Deuxième méthode :

Dans le cube ABCDEFGH les faces ABFE et BCGF sont des carrés.

Donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$. De plus I et L sont les milieux des côtés [AE] et [CG] d'où $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CG}$. On en déduit que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CL}$.

Donc ACLI est un parallélogramme.

b. Démontrer que les droites (JK) et (LI) sont parallèles.

Dans le triangle ABC, J est le milieu de [BA] et K est le milieu de [BC].

D'après le théorème des milieux $(JK) \parallel (AC)$.

Dans le parallélogramme ACLI les côtés opposés sont parallèles donc $(IL) \parallel (AC)$.

Donc $(JK) \parallel (IL)$

c. En déduire que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point M que vous tracerez.

$(JK) \parallel (IL)$ donc les droites (JK) et (IL) sont coplanaires et les points I, J, K et L sont coplanaires. Donc les droites (IJ) et (KL) sont coplanaires.

D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, $JK = \frac{1}{2} AC$.

Or $AC = IL$ donc $JK = \frac{1}{2} IL$ d'où $JK \neq IL$. On en déduit que les droites (IJ) et (KL) ne peuvent pas être parallèles.

Donc les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point M.

d. Montrer que M appartient à la droite (BF).

$M \in (IJ)$ et $(IJ) \subset (EFB)$ donc $M \in (EFB)$
 $M \in (KL)$ et $(KL) \subset (GFB)$ donc $M \in (GFB)$ } Donc $M \in (EFB) \cap (GFB)$

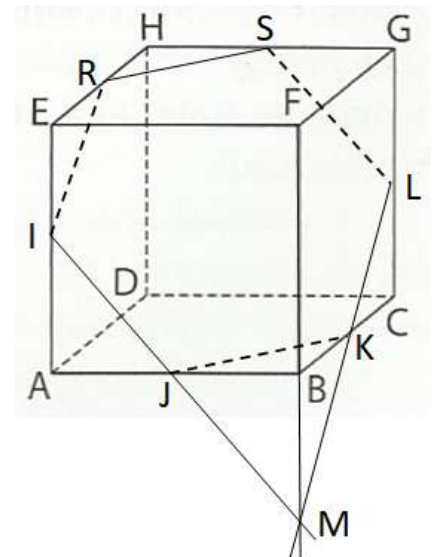
Or les plans (EFB) et (GFB) sont sécants suivant la droite (FB) donc $M \in (FB)$

e. Tracer en vert la section du cube par le plan (IJL) dans la figure ci-dessous.

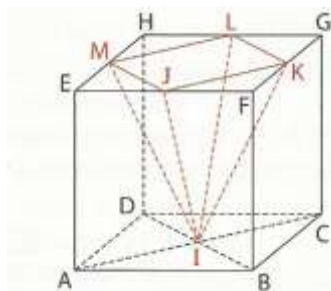
La parallèle à (KL) passant par I coupe le côté [EH] en R.

La parallèle à (IJ) passant par L coupe le côté [HG] en S

La section du cube est le polygone IJKLSR.



Exercice n°3 : ABCDEFGH est un cube de côté ℓ . I, J, K, L et M sont les milieux respectifs de [AC],[EF],[FG],[HG] et [EH].



1. Exprimer en fonction de ℓ , le volume de la pyramide IJKLM.

Tout d'abord on justifie que JKLM est un carré.

Dans le triangle HEF, M milieu de [EH], J milieu de [EF] d'après le théorème des milieux (MJ)//(HF) et $MJ = \frac{1}{2} HF$.

En utilisant le même raisonnement on prouve (LK)//(HF) et donc (MJ)//(LK)//(HF)

$$LK = \frac{1}{2} HF \text{ et donc } LK = MJ = \frac{1}{2} HF$$

On démontre de même que : (ML)//(JK)//(EG) et $ML = JK = \frac{1}{2} EG$.

Or EFGH est un carré donc les diagonales [HF] et [EG] sont perpendiculaires et ont même longueur.

Donc $LK = LM = MJ = JK = \frac{1}{2} EG$ donc JKLM est un losange.

Dans le plan (EFGH), (HF) $\perp$ (EG) et (HF)//(LK) et (EG)//(ML) donc (ML) $\perp$ (LK).

On en déduit que JKLM est un carré de côté $ML = \frac{1}{2} EG$.

[EG] est une diagonale du carré de côté ℓ donc $EG = \ell\sqrt{2}$. Donc $ML = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du carré JKLM est égale à $(ML)^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{2}$

Le volume de la pyramide est égal à $V = \frac{1}{3} \text{aire}_{JKLM} \times \text{hauteur}$.

La hauteur h de la pyramide est la longueur du segment passant par le sommet I et perpendiculaire à la base JKLM.

h est égale à $EA = \ell$.

$$\text{Donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{\ell^2}{2} \times \ell = \frac{\ell^3}{6}$$

2. Les plans (MJI) et (LIK) sont sécants suivant la droite (DB). Justifier.

Les plans (MJI) et (LIK) sont sécants suivant une droite qui passe par le point I.

Or (MJ) $\subset$ (MJI), (LK) $\subset$ (LIK) et (MJ)//(LK)//(HF).

D'après le théorème du toit les plans sont sécants suivant une droite qui passe par le point I et parallèle à (HF).

C'est la droite (DB).

3. Quelle est l'intersection des plans (MLI) et (JIK) ? (on ne justifiera pas)

De même on peut prouver que les plans sont sécants suivant la droite (AC).

4. Quelle est l'intersection des quatre plans (MJI), (LIK), (MLI) et (JIK) ?

Les plans (MJI) et (LIK) sont sécants suivant la droite (DB).

Les plans (MLI) et (JIK) sont sécants suivant la droite (AC).

Donc si un point M appartient aux 4 plans,

- Il appartient aux plans (MJI) et (LIK), sécants suivant la droite (DB) donc il appartient à (DB)
- Il appartient aux plans (MLI) et (JIK) sécants suivant la droite (AC) donc il appartient à (AC)

Donc il appartient aux droites (DB) et (AC). C'est le point I.

Exercice n°4 : Partie A : Restitution organisée de connaissances

Objectif : Démontrer que lorsque $q > 1$, la limite de (q^n) en l'infini est égale à $+\infty$.

$q > 1$ donc il existe un réel α tel que $q = \alpha + 1$. On admet que pour tout entier naturel n , $q^n \geq 1 + n\alpha$.

$q > 1 \Leftrightarrow \alpha + 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n\alpha = +\infty$.

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n \geq 1 + n\alpha$, d'après le théorème de comparaison en l'infini on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Partie B : On définit :

- La suite (u_n) par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$;
- La suite (S_n) par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ pour tout entier naturel n

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

On pose P_n : « $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ »

(1) Initialisation

$$n=0 \quad u_0=13 \text{ et } 1 + \frac{12}{5^0} = 1 + \frac{12}{1} = 13 \text{ donc } u_0 = 1 + \frac{12}{5^0} \text{ donc } P_0 \text{ est vraie}$$

Autre méthode : Calcul de l'aire de JKLM.

Les triangles EMJ, FKJ, FGL, LHM sont identiques, rectangles et isocèles.

Donc $\text{aire}_{JKLM} = \text{aire}_{EFGH} - 4 \times \text{aire}_{EMJ}$

$$\text{aire}_{JKLM} = \ell^2 - 4 \times \frac{(0,5 \ell \times 0,5 \ell)}{2}$$

$$\text{aire}_{JKLM} = \ell^2 - 0,5 \ell^2 = 0,5 \ell^2 = \frac{\ell^2}{2}$$

C'est plus rapide...

(2) Hérédité

On suppose que P_n est vraie pour un entier $n \geq 0$, démontrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire : « $u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$ »

P_n est vraie $\Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} u_n = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{12}{5^n} \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{12}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} + \frac{4}{5} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}} \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie}$$

La propriété est héréditaire.

(3) Conclusion :

- P_0 est vraie
- La propriété est héréditaire.

Donc pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

$5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{5^n} = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{12}{5^n} = 1$.

2. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

$$S_{n+1} - S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} - (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n) = u_{n+1}$$

Or $u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$, $1 > 0$, $12 > 0$ et $5^{n+1} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

donc $S_{n+1} - S_n > 0$. Donc la suite (S_n) est croissante.

3. Objectif : Calculer la valeur d'un terme S_n pour une valeur de n donnée.

a) Déterminer un algorithme affichant la valeur d'un terme S_n pour une valeur de n donnée .

Lire N 13 $\rightarrow$ U 13 $\rightarrow$ S Pour I allant de 1 à N $\frac{1}{5} U + \frac{4}{5} \rightarrow U$ $U + S \rightarrow S$ Fin pour Afficher S	Ou bien	Lire N 13 $\rightarrow$ U 13 $\rightarrow$ S Pour I allant de 1 à N $1 + \frac{12}{5^I} \rightarrow U$ $U + S \rightarrow S$ Fin pour Afficher S	Ou bien	Lire N 13 $\rightarrow$ U 13 $\rightarrow$ S 0 $\rightarrow$ I Tant que I < N $I + 1 \rightarrow I$ $1 + \frac{12}{5^I} \rightarrow U$ $U + S \rightarrow S$ Fin tant que Afficher S
---	---------	--	---------	---

b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $S_n = n + 1 + 15(1 - (\frac{1}{5})^{n+1})$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = 1 + \frac{12}{5^0} + 1 + \frac{12}{5^1} + 1 + \frac{12}{5^2} + \dots + 1 + \frac{12}{5^n} = \underbrace{1 + 1 + 1 \dots + 1}_A + \underbrace{\frac{12}{5^0} + \frac{12}{5^1} + \frac{12}{5^2} + \dots + \frac{12}{5^n}}_B$$

Le terme S_n est une somme de $n+1$ termes de la suite (u_n).

Donc A est la somme de $n+1$, 1. Donc $A = (n+1) \times 1 = n+1$

Donc B est la somme des $n+1$ termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{12}{5^0} = 12$ et de raison $\frac{1}{5}$

$$\text{Donc } B = 12 \times \frac{1 - (\frac{1}{5})^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = 12 \times \frac{1 - (\frac{1}{5})^{n+1}}{\frac{4}{5}} = 12 \times \frac{5}{4} (1 - (\frac{1}{5})^{n+1}) = 15 \times (1 - (\frac{1}{5})^{n+1})$$

$$\text{Donc } S_n = A + B = n + 1 + 15(1 - (\frac{1}{5})^{n+1}).$$

c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$
- $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{5})^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (\frac{1}{5})^n = 1$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 15 \times (1 - (\frac{1}{5})^n) = 15$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$