Nom :
Prénom :

DS n°2
le 19/12/2017

Classe :
BTS 1

Compétences évaluées	*Avis du professeur* Acquis	En cours d'acquisition	Non Acquis
Utiliser les résultats fournis par un logiciel de calcul formel.			
Dériver une fonction.			
Déterminer les limites d'une fonction. Interpréter graphiquement certains résultats.			
Déterminer les variations d'une fonction. Dresser un tableau de variations complet.			
Comprendre un algorithme. Déterminer le résultat affiché en sortie.			
Compléter un tableau de valeurs			
Construire la courbe représentative d'une fonction.			
Justifier qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle donné.			

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : **… / 4**

Dans cet exercice, on pourra utiliser les résultats suivants, obtenus avec geogebra, sans les justifier.

1	f(t):=-0.7+exp(1324/t) → $f(t) := e^{\frac{1324}{t}} - \frac{7}{10}$
2	f'(t):=Dérivée(f(t)) → $f'(t) := -1324 \cdot \frac{e^{\frac{1324}{t}}}{t^2}$
3	NRésoudre(f(t)=40) → $\{t = 357.2365129652\}$
4	g(t):=-0.7+exp(4.06*10^(10)/t^4) → $g(t) := e^{\frac{40600000000}{t^4}} - \frac{7}{10}$
5	g'(t):=Dérivée(g(t)) → $g'(t) := -162400000000 \cdot \frac{e^{\frac{40600000000}{t^4}}}{t^5}$
6	NRésoudre(f(t)=g(t)) → $\{t = 313.0012097926\}$
7	f'(313) ≈ −0.9287072666
8	g'(313) ≈ −3.7150543584

La viscosité d'un lubrifiant décroit lorsque la température augmente, mais de façon plus ou moins rapide selon sa nature chimique.

1. Pour un nouveau lubrifiant silicone, la viscosité (en $mm^2.s^{-1}$) à la température t (en Kelvin) est $f(t)$ où f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(t) = -0,7 + e^{\frac{1324}{t}}.$$
a) Justifier la décroissance de f sur $]0\,;+\infty[$.
b) Déterminer, au °C près, la température à partir de laquelle la viscosité de ce lubrifiant devient inférieure à 40 $mm^2.s^{-1}$.
Indication : On obtient la température en °C en retranchant 273 à la température en °K.
2. La viscosité (en $mm^2.s^{-1}$) d'un lubrifiant minéral de grade ISOVG68 est donné par :
$$g(t) = -0,7 + e^{\frac{4,06\times 10^{10}}{t^4}}.$$
A quelle température, au °K près, peut-on estimer que la viscosité des deux lubrifiants est la même ?
3. On admet qu'un lubrifiant L est plus performant qu'un autre L' si, lorsque la température augmente, la viscosité de L décroît plus lentement que celle de L'.
Quel est, des deux lubrifiants présentés ci-dessus, le plus performant pour des températures proches de 313 °K ?

Exercice 2 : Soit f définie sur $]\frac{-1}{2}\,;+\infty[$ par : $f(x) = 4x - 2 - 3\,ln(2x+1)$. **… / 5**
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire une asymptote de $\mathscr{C}$.
2. a) Justifier que $f'(x)$ est du même signe que $4x - 1$ sur $]\frac{-1}{2}\,;+\infty[$.
b) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 3 : **… / 11**

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (1+2x)e^{-2x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. a) Justifier que pour tout x de $[0\,;+\infty[$ par : $f'(x) = -4x\,e^{-2x}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
3. a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Arrondir à 10^{-2} près.

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$f(x)$						

   b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques 5 cm pour 1 unité en abscisse et 10 cm pour 1 unité en ordonnée.
4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une unique solution α sur $[0\,;3]$.

   b) Quel est le rôle de l'algorithme suivant ? Quelle est la valeur affichée en sortie ?

```
0 → x
1 → v
Tant que v > 0,25
   x + 0,1 → x
   (1 + 2x)e^(-2x) → v
Fin tant que
Afficher x
```

Partie B :

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide. Le taux de défaillance du réfractomètre dans l'intervalle de temps $[0\,;+\infty[$ peut être modélisé par la fonction g définie par $g(t) = 1 - f(t)$ où t est exprimé en heures et f est la fonction définie dans la partie A.

1. Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout de deux heures ?
   Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} près.
2. Pour des raisons de fiabilité, on doit changer le réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à $0,75$.

   a) Montrer que le taux de défaillance est supérieur ou égal à $0,75$ lorsque $f(t) \leq 0,25$.

   b) Déterminer la durée d'utilisation du réfractomètre, à 10^{-1} près.

<u>Correction du DS n°2</u>

Exercice 1 :

Dans cet exercice, on pourra utiliser les résultats suivants, obtenus avec geogebra, sans les justifier.

1	f(t):=-0.7+exp(1324/t) → $f(t) := e^{\frac{1324}{t}} - \frac{7}{10}$
2	f'(t):=Dérivée(f(t)) → $f'(t) := -1324 \cdot \frac{e^{\frac{1324}{t}}}{t^2}$
3	NRésoudre(f(t)=40) → {t = 357.2365129652}
4	g(t):=-0.7+exp(4.06*10^(10)/t^4) → $g(t) := e^{\frac{40600000000}{t^4}} - \frac{7}{10}$
5	g'(t):=Dérivée(g(t)) → $g'(t) := -162400000000 \cdot \frac{e^{\frac{40600000000}{t^4}}}{t^5}$
6	NRésoudre(f(t)=g(t)) → {t = 313.0012097926}
7	f'(313) ≈ −0.9287072666
8	g'(313) ≈ −3.7150543584

La viscosité d'un lubrifiant décroit lorsque la température augmente, mais de façon plus ou moins rapide selon sa nature chimique.

1. Pour un nouveau lubrifiant silicone, la viscosité (en mm^2.s^{-1}) à la température t (en Kelvin) est $f(t)$ où f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = -0,7 + e^{\frac{1324}{t}}.$$

a) Justifier la décroissance de f sur $]0 ; +\infty[$.

$\forall$ t $\in]0 ; +\infty[$, $f(t) = -0,7 + e^{\frac{1324}{t}}$

$$f'(t) = -\frac{1324}{t^2}\, e^{\frac{1324}{t}}$$

$-1324 < 0$

$\forall$ t $\in]0 ; +\infty[$, $t^2 > 0$ et $e^{\frac{1324}{t}} > 0$

On en déduit que f' est négative sur $]0 ; +\infty[$.

Ainsi, f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

b) Déterminer, au °C près, la température à partir de laquelle la viscosité de ce lubrifiant devient inférieure à 40 mm^2.s^{-1}.

Indication : On obtient la température en °C en retranchant 273 à la température en °K.

D'après les résultats affichés on a :

$f(t) = 40 \quad \Leftrightarrow \quad t \approx 357$ °K

Puisque f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on en déduit :

$f(t) < 40 \quad \Leftrightarrow \quad t > 357$ °K

$357 - 273 = 84$

Donc la viscosité du lubrifiant silicone devient inférieure à 40 mm^2.s^{-1} à partir de 84 °C.

2. La viscosité (en mm^2.s^{-1}) d'un lubrifiant minéral de grade ISOVG68 est donné par :

$$g(t) = -0,7 + e^{\frac{4,06\times 10^{10}}{t^4}}.$$

A quelle température, au °K près, peut-on estimer que la viscosité des deux lubrifiants est la même ?

D'après les résultats affichés on a : $f(t) = g(t) \quad \Leftrightarrow \quad t \approx 313$ °K

On peut alors estimer que la viscosité des deux lubrifiants est la même à 313 °K.

3. On admet qu'un lubrifiant L est plus performant qu'un autre L' si, lorsque la température augmente, la viscosité de L décroît plus lentement que celle de L'.
Quel est, des deux lubrifiants présentés ci-dessus, le plus performant pour des températures proches de 313 °K ?

La viscosité des deux lubrifiants (le silicone et le minéral) décroit lorsque la température augmente mais d'après les résultats affichés, on a : $f'(313) \approx -0,93$ et $g'(313) \approx -3,72$

On a alors $f'(313) > g'(313)$

Ces valeurs sont associées aux coefficients directeurs des tangentes aux courbes représentatives de f et g au point d'abscisse 313. On en déduit que la viscosité du lubrifiant silicone décroît plus lentement que celle du lubrifiant minéral pour des températures proches de 313 °K ?

Exercice 2 : Soit f définie sur $]\frac{-1}{2}\ ; +\infty[$ par : $f(x) = 4x - 2 - 3\,ln(2x+1)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire une asymptote de $\mathscr{C}$.

- Etude de la limite en $\frac{-1}{2}$:
  $\lim\limits_{x \to \frac{-1}{2}} 4x - 2 = -4$
  De plus : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{-1}{2} \\ x > \frac{-1}{2}}} 2x+1 = 0^+$ Or : $\lim\limits_{X \to 0^+} lnX = -\infty$ Donc, par composée : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{-1}{2} \\ x > \frac{-1}{2}}} ln(2x+1) = -\infty$
  On en déduit, par produit : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{-1}{2} \\ x > \frac{-1}{2}}} -3ln(2x+1) = +\infty$ et par somme : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{-1}{2} \\ x > \frac{-1}{2}}} f(x) = +\infty$
- Etude de la limite en $+\infty$:
  $\forall\, x \in]\frac{-1}{2}\ ; +\infty[$, $f(x) = 4x - 2 - 3\,ln(2x+1) = (2x+1)(\frac{4x-2}{2x+1} - 3\,\frac{ln(2x+1)}{2x+1})$
  On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x+1 = +\infty$ Or : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{lnX}{X} = 0^+$ Donc, par composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(2x+1)}{2x+1} = 0^+$
  De plus, la limite en l'infini d'une fonction rationnelle est celle de ses termes de plus haut degré.
  Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x-2}{2x+1} = \frac{4}{2} = 2$
  On en déduit, par somme et produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{4x-2}{2x+1} - 3\,\frac{ln(2x+1)}{2x+1}) = 2 - 3 \times 0 = 2$
  Finalement, par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Puisque $\lim\limits_{x \to \frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

2. a) Justifier que $f'(x)$ est du même signe que $4x - 1$ sur $]\frac{-1}{2}\ ; +\infty[$.

$\forall\, x \in]\frac{-1}{2}\ ; +\infty[$, $f(x) = 4x - 2 - 3\,ln(2x+1) = 4x - 2 - 3\,ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x+1$

Donc : $f'(x) = 4 - 3\frac{u'(x)}{u(x)} = 4 - 3\frac{2}{2x+1} = \frac{4(2x+1)-6}{2x+1} = \frac{8x+4-6}{2x+1} = \frac{8x-2}{2x+1} = \frac{2(4x-1)}{2x+1}$

$2 > 0$ et $2x+1 > 0 \iff 2x > -1 \iff x > \frac{-1}{2}$

On en déduit que $f'(x)$ est du même signe que $4x - 1$ sur $]\frac{-1}{2}\ ; +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

On sait que $f'(x)$ est du même signe que $4x - 1$ sur $]\frac{-1}{2}\ ; +\infty[$.

Donc : $f'(x) > 0 \iff 4x - 1 > 0 \iff 4x > 1 \iff x > \frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{4}) = 4 \times \frac{1}{4} - 2 - 3\,ln(2 \times \frac{1}{4} + 1) = -1 - 3\,ln(\frac{3}{2})$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-1-3\,ln(\frac{3}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (1+2x)e^{-2x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

$\forall\, x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = (1+2x)e^{-2x} = e^{-2x} + 2x\,e^{-2x} = e^{-2x} + \dfrac{2x}{e^{2x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ Or : $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ Donc, par composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ Or : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^{X}} = 0$ Donc, par composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^{2x}} = 0$

Ainsi, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. a) Justifier que pour tout x de $[0\,;+\infty[$ par : $f'(x) = -4x\,e^{-2x}$.

$\forall\, x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = (1+2x)e^{-2x} = u(x)\,v(x)$ avec : $u(x) = 1+2x$ et : $v(x) = e^{-2x}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 2\,e^{-2x} - 2\,e^{-2x}(1+2x)$

$f'(x) = 2\,e^{-2x} - 2\,e^{-2x} - 4x\,e^{-2x} = -4x\,e^{-2x}$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall\, x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) = -4x\,e^{-2x}$

$\forall\, x \in [0\,;+\infty[$, $e^{-2x} > 0$ et : $-4x < 0$ donc : $f'(x) < 0$

$f(0) = (1 + 2\times 0)e^{-2\times 0} = 1e^{0} = 1$

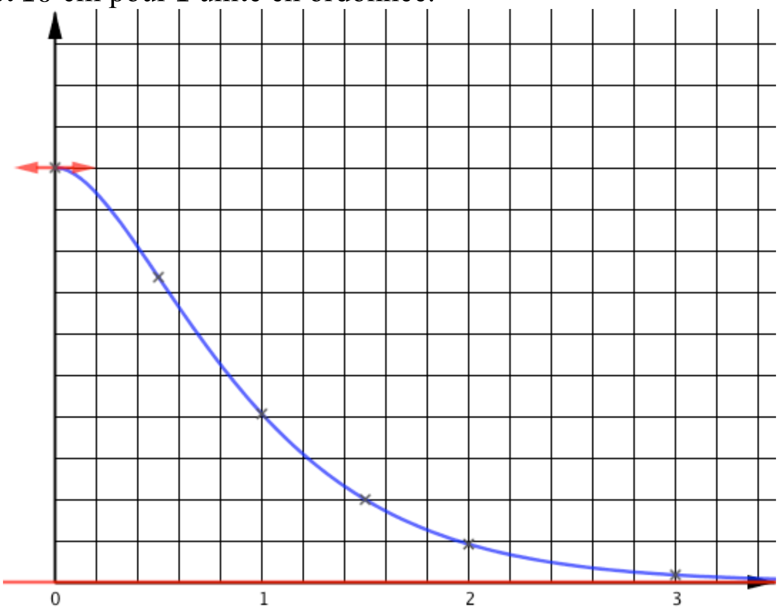
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

3. a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Arrondir à 10^{-2} près.

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$f(x)$	1	$0,74$	$0,41$	$0,2$	$0,09$	$0,02$

b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques 5 cm pour 1 unité en abscisse et 10 cm pour 1 unité en ordonnée.



Remarque : On commence par indiquer en rouge la tangente horizontale au point d'abscisse 0 et l'asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ pour sentir et représenter les courbures initiales et finales de la courbe.

4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une unique solution α sur $[0 ; 3]$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0 ; 3]$.
On a : $f(0) = 1$ Et : $f(3) \approx 0,02$
Or : $0,02 < 0,25 < 1$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur $[0;3]$.
On la note α.

b) Quel est le rôle de l'algorithme suivant ? Quelle est la valeur affichée en sortie ?

```
0 → x
1 → v
Tant que v > 0,25
   x + 0,1 → x
   (1 + 2x)e^(-2x) → v
Fin tant que
Afficher x
```

Cet algorithme permet de déterminer une valeur approchée, au dixième près, du plus petit réel x positif tel que :
$$f(x) \leq 0,25$$
La valeur affichée en sortie est : $x = 1,4$

Partie B :

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide. Le taux de défaillance du réfractomètre dans l'intervalle de temps $[0 ; +\infty[$ peut être modélisé par la fonction g définie par $g(t) = 1 - f(t)$ où t est exprimé en heures et f est la fonction définie dans la partie A.

1. Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout de deux heures ?
   Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} près.

$g(2) = 1 - f(2) = 1 - (1 + 2 \times 2)e^{-2\times 2} = 1 - 5\,e^{-4} \approx 0,91$

2. Pour des raisons de fiabilité, on doit changer le réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à $0,75$.

   a) Montrer que le taux de défaillance est supérieur ou égal à $0,75$ lorsque $f(t) \leq 0,25$.

$g(t) \geq 0,75 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - f(t) \geq 0,75 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 0,75 \geq f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \leq 0,25$

   b) Déterminer la durée d'utilisation du réfractomètre, à 10^{-1} près.

On doit changer le réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à $0,75$, c'est-à-dire lorsque $f(t) \leq 0,25$. Le résultat fourni par l'algorithme étudié à la question 4 de la partie A indique que :
$f(t) \leq 0,25 \quad \Leftrightarrow \quad t \approx 1,4$
On doit donc changer de réfractomètre au bout de $1,4$ heure d'utilisation.