Nom : **DS n°2** *Note* :

Classe : 1ère Spé maths G1 — Fonctions du 2nd degré et suites — … / 20

le 14/11/2019

Je sais :	Evaluation des capacités Non → Oui
Les définitions, les propriétés et les différents autres éléments du cours	
Refaire des exercices corrigés en classe (Exercices contrôlés).	
Identifier les courbes représentatives de deux fonctions polynômes du 2nd degré.	
Conjecturer graphiquement une forme canonique / un sens de variations.	
Déterminer le sens de variations d'une fonction du 2nd degré.	
Déterminer les points d'intersection de deux paraboles.	
Résoudre un problème de physique.	
Résoudre une équation bicarrée	
Donner les formules qui permettent de compléter une feuille de calcul.	
Calculer les termes d'une suite.	
Démontrer qu'une suite est géométrique. Préciser son 1er terme et sa raison.	
Exprimer le terme général d'une suite en fonction de n.	

Cours : Compléter les définitions, les propriétés et autres éléments du cours sur les suites. **… / 5**

1. Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
   On considère la fonction du 2nd degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

   a) Donner la formule du discriminant Δ : ……………………

   b) Compléter le tableau suivant :

	L'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution ? Oui ou Non	Si oui, préciser laquelle ou lesquelles
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$		

   c) Compléter le tableau suivant :

	$f(x)$ est factorisable ? Oui ou Non	Si oui, préciser la forme factorisée de $f(x)$
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$		

2. On suppose que $\Delta > 0$. Alors $f(x)$ possède deux racines distinctes x_1 et x_2.

   a) Compléter :

   $$S = x_1 + x_2 = \ldots \quad \text{et : } P = x_1 \times x_2 = \ldots$$

   b) Dans ce cas, x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation : ……………………………………

3. Compléter le théorème suivant :

<u>Théorème admis</u> : Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère la fonction polynôme du 2nd degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Si ……….. alors la fonction f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.
  De plus, la fonction f est du signe de … sur $\mathbb{R}$.
- Si ……….. alors la fonction f s'annule en … = …
  De plus, f est du signe de … sur …
- Si ……….. alors la fonction f s'annule en … = … et en … = …
  De plus, f est du signe de … sur …

Exercices contrôlés : **… / 3**

1. Résoudre, si possible, les équations suivantes :
   a) $x^2 - 3x + 1 = 0$ b) $2x^2 + 9 = 0$
2. Factoriser, si possible.
   a) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ b) $g(x) = 18x^2 - 12x + 2$

Exercice 2 : **… / 4,5**

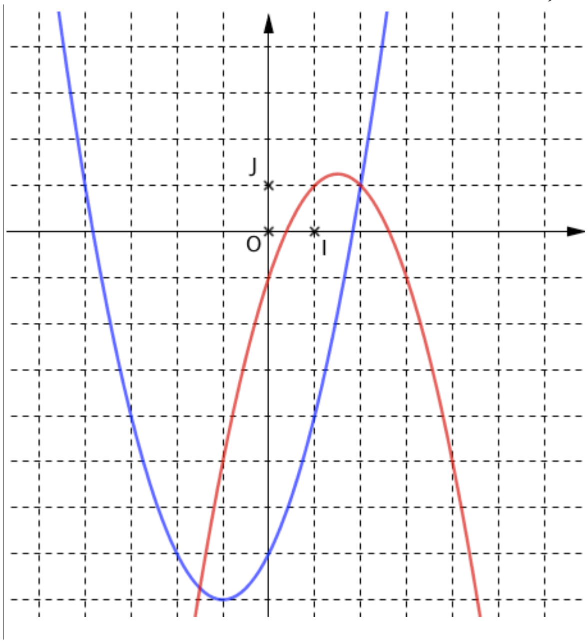
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 7 \quad g(x) = -x^2 + 3x - 1$$

On se place dans un repère orthonormé (O;I,J) et on note respectivement $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les courbes représentatives de f et g.

1. Identifier $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ dans le repère ci-contre. Justifier.
2. a) Par lecture graphique, conjecturer :
   - la forme canonique de $f(x)$
   - le sens de variations de f (sans tableau de variation.)

   b) Déterminer par le calcul le tableau de variations de g.
3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.



Exercice 3 : **… / 1**

Un moteur fournit une puissance P (en watts), sous une tension U (en volts), grâce à un circuit électrique de résistance R (en ohms). L'intensité I (en ampères) vérifie l'équation $RI^2 - UI + P = 0$.
Avec une tension de 220 volts et une résistance de 10 ohms, quelles sont les intensités du courant qui fournissent une puissance de 100 watts ?

Exercice 4 : Résolution d'une équation bicarrée. **… / 2**

On cherche à résoudre l'équation (E) suivante :

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0$$

Pour cela, on pose $X = x^2$ et on admet que x est solution de (E) si et seulement si X est solution de (E') :

$$X^2 - 11X + 18 = 0$$

Résoudre l'équation (E') puis en déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 5 : **… / 4,5**

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2\,u_n + 2\,n^2 - n$$

On considère également la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n + 2\,n^2 + 3\,n + 5$$

Voici ci-contre, un extrait de feuille de calcul.

	A	B	C
1	**n**	**u_n**	**v_n**
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5		

1. a) Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules B3 et C2 puis recopiées vers le bas pour afficher les premiers termes des suites ?

   b) Calculer les valeurs manquantes dans les cellules B7 et C7.
2. a) Démontrer que la suite v est géométrique.
   Préciser son 1er terme et sa raison.

   b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Correction du DS n°2

Cours : Compléter les définitions, les propriétés et autres éléments du cours sur les suites.

1. Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
   On considère la fonction du 2nd degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

   a) Donner la formule du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$

   b) Compléter le tableau suivant :

	L'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution ? Oui ou Non	Si oui, préciser laquelle ou lesquelles
$\Delta < 0$	Non	
$\Delta = 0$	Oui	$x_0 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta > 0$	Oui	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

   c) Compléter le tableau suivant :

	$f(x)$ est factorisable ? Oui ou Non	Si oui, préciser la forme factorisée de $f(x)$
$\Delta < 0$	Non	
$\Delta = 0$	Oui	$a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	Oui	$a(x - x_1)(x - x_2)$

2. On suppose que $\Delta > 0$. Alors $f(x)$ possède deux racines distinctes x_1 et x_2.

   a) Compléter :

$$\mathrm{S} = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et : } \mathrm{P} = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

   b) Dans ce cas, x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$

3. Compléter le théorème suivant :

<u>Théorème admis</u> : Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère la fonction polynôme du 2nd degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta < 0$ alors la fonction f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.
  De plus, la fonction f est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors la fonction f s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a}$
  De plus, f est du signe de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$
- Si $\Delta > 0$ alors la fonction f s'annule en $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et en $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  De plus, f est du signe de a sur $]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$

Exercices contrôlés :

1. Résoudre, si possible, les équations suivantes :

a) $x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 = 9 - 4 = 5 > 0$

On en déduit deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $\mathrm{S} = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2} ; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$

b) $2x^2 + 9 = 0$

$2x^2 = -9$

$x^2 = -\frac{9}{2}$

Or, le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul
Donc cette équation n'admet aucune solution.
$\mathrm{S} = \emptyset$

2. Factoriser, si possible.

a) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49 > 0$

On en déduit deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{-4} = \frac{-5-7}{-4} = 3$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+7}{-4} = \frac{-1}{2}$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -2(x-3)(x+\frac{1}{2})$

b) $g(x) = 18x^2 - 12x + 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 18 \times 2 = 0$

On en déduit une racine unique :

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$f(x) = a(x - x_0)^2 = 18(x - \frac{1}{3})^2$

Exercice 2 :

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 7 \quad g(x) = -x^2 + 3x - 1$$

On se place dans un repère orthonormé (O;I,J) et on note respectivement $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les courbes représentatives de f et g.

1. Identifier $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ dans le repère ci-contre. Justifier.

$\mathscr{P}_1$ est la courbe représentative de la fonction définie par :
$f(x) = x^2 + 2x - 7 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1 > 0$
Donc $\mathscr{P}_1$ est ouverte vers le haut.

$\mathscr{P}_2$ est la courbe représentative de la fonction g définie par :
$g(x) = -x^2 + 3x - 1 = a'x^2 + b'x + c'$ avec $a' = -1 < 0$
Donc $\mathscr{P}_2$ est ouverte vers le bas.

2. a) Par lecture graphique, conjecturer :

- la forme canonique de $f(x)$

f est représentée graphiquement par $\mathscr{P}_1$ dont le sommet est S(-1 ; -8).
On en déduit $\alpha = -1$ et $\beta = -8$. De plus : $a = 1$
Ainsi : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = (x+1)^2 - 8$

- le sens de variations de f (sans tableau de variation.)

$\mathscr{P}_1$ est ouverte vers le haut et $\alpha = -1$.
On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ puis strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

b) Déterminer par le calcul le tableau de variations de g.

$g(x) = -x^2 + 3x - 1 = a'x^2 + b'x + c'$
avec $a' = -1$, $b' = 3$ et $c' = -1$

$\alpha = \frac{-b'}{2a'} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ et $\beta = g(\alpha) = -(\frac{3}{2})^2 + 3 \times \frac{3}{2} - 1 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 1 = \frac{-9}{4} + \frac{18}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$

$\mathscr{P}_2$ est ouverte vers le bas puisque $a' < 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{5}{4}$	↘ $-\infty$

1. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

On résout $f(x) = g(x)$

$$x^2 + 2x - 7 = -x^2 + 3x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x^2 + 2x - 3x - 7 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 6 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 > 0$

On en déduit deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - \sqrt{49}}{4} = \dfrac{1 - 7}{4} = \dfrac{-3}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + 7}{4} = 2$

x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. On calcule leurs ordonnées :

$g(-\dfrac{3}{2}) = -(\dfrac{-3}{2})^2 + 3 \times \dfrac{-3}{2} - 1 = -\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} - 1 = \dfrac{-9}{4} - \dfrac{18}{4} - \dfrac{4}{4} = \dfrac{-31}{4}$

$g(2) = -2^2 + 3 \times 2 - 1 = -4 + 6 - 1 = 1$

Ainsi, les courbes $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent en $\mathrm{A}(\dfrac{-3}{2} ; \dfrac{-31}{4})$ et $\mathrm{B}(2 ; 1)$.

Exercice 3 :

Un moteur fournit une puissance P (en watts), sous une tension U (en volts), grâce à un circuit électrique de résistance R (en ohms). L'intensité I (en ampères) vérifie l'équation $RI^2 - UI + P = 0$.
Avec une tension de 220 volts et une résistance de 10 ohms, quelles sont les intensités du courant qui fournissent une puissance de 100 watts ?

On résout : $10I^2 - 220I + 100 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-220)^2 - 4 \times 10 \times 100 = 48400 - 4000 = 44400 > 0$

On en déduit deux solutions distinctes :

$I_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{220 - \sqrt{44400}}{20} = \dfrac{220 - 20\sqrt{111}}{20} = 11 - \sqrt{111}$

$I_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{220 + 20\sqrt{111}}{20} = 11 + \sqrt{111}$

Exercice 4 : Résolution d'une équation bicarrée.

On cherche à résoudre l'équation (E) suivante :

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0$$

Pour cela, on pose $X = x^2$ et on admet que x est solution de (E) si et seulement si X est solution de (E') :

$$X^2 - 11X + 18 = 0$$

Résoudre l'équation (E') puis en déduire les solutions de l'équation (E).

On résout : $X^2 - 11X + 18 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times 18 = 121 - 72 = 49 > 0$

On en déduit deux solutions distinctes :

$X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11 - \sqrt{49}}{2} = \dfrac{11 - 7}{2} = 2$

$X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11 + 7}{2} = 9$

Or $X = x^2$

On en déduit : $x^2 = 2$ ou $x^2 = 9$

Donc : $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{9} = 3$ ou $x = -\sqrt{9} = -3$

Exercice 5 :

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2\,u_n + 2\,n^2 - n$$

On considère également la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n + 2\,n^2 + 3\,n + 5$$

Voici ci-contre, un extrait de feuille de calcul.

	A	B	C
1	**n**	**u_n**	**v_n**
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5		

1. a) Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules B3 et C2 puis recopiées vers le bas pour afficher les premiers termes des suites ?

En B3 on tape = 2B2+2A2^2 – A2
En C2 on tape = B2 + 2A2^2 + 3A2 + 5

b) Calculer les valeurs manquantes dans les cellules B7 et C7.

$u_5 = 2\,u_4 + 2 \times 4^2 - 4 = 2 \times 63 + 2 \times 16 - 4 = 126 + 32 - 4 = 154$
$v_5 = u_5 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 5 = 154 + 50 + 15 + 5 = 224$

2. a) Démontrer que la suite v est géométrique.
Préciser son 1^er terme et sa raison.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 2\,(n+1)^2 + 3\,(n+1) + 5$
$v_{n+1} = 2\,u_n + 2\,n^2 - n + 2\,(n^2 + 2\,n + 1) + 3\,n + 3 + 5$
$v_{n+1} = 2\,u_n + 2\,n^2 - n + 2\,n^2 + 4\,n + 2 + 3\,n + 3 + 5$
$v_{n+1} = 2\,u_n + 4\,n^2 + 6\,n + 10$
$v_{n+1} = 2\,(u_n + 2\,n^2 + 3\,n + 5)$
$v_{n+1} = 2\,v_n$
La suite v est donc géométrique de raison $q = 2$ et de 1^er terme $v_0 = 7$.

b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

La suite v est donc géométrique de raison $q = 2$ et de 1^er terme $v_0 = 7$
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 7 \times 2^n$
Or : $v_n = u_n + 2\,n^2 + 3\,n + 5$
Donc : $u_n = v_n - 2\,n^2 - 3\,n - 5 = 7 \times 2^n - 2\,n^2 - 3\,n - 5$