Nom :
Classe : TMATHS1

DS n°2
Géométrie dans l'espace

Le : 16/11/2022

Durée : 2h
Note : … / 20

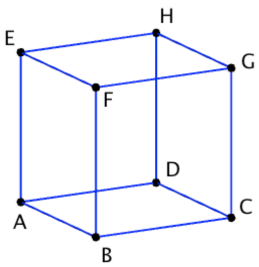
	Avis du professeur	
Compétences évaluées :	Non maîtrisée	Bien maîtrisée
Maîtriser les exercices / les méthodes travaillé(e)s en classe.		
Compétences du livret scolaire :		
• (C1) Mener une recherche de façon autonome.		
• (C2) Modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle.		
• (C3) Représenter, choisir un cadre, changer de registre.		
• (C4) Calculer, appliquer des techniques, mettre en œuvre des algorithmes.		
• (C5) Raisonner, argumenter en exerçant un regard critique, démontrer.		
• (C6) Communiquer à l'écrit en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents.		
• (C7) Communiquer à l'oral en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents.	Non évaluée	

Exercices Contrôlés : En vrac **… / 7**

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

1. a) Construire les points P et T tels que :
   - $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
   - $\overrightarrow{BT} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

   b) Montrer que les points C, T et P sont alignés.



2. On considère un tétraèdre ABCD.
   Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BM} - \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$. Montrer que le point M appartient au plan (ABC).

3. Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ on considère les points suivants :
   $$A(1\,;0,5\,;2),\ B(0\,;2\,;0,5),\ C(3\,;2,5\,;7) \text{ et } D(3\,;-2,5\,;1)$$
   a) Les points A, B et C sont ils alignés ?

   b) On considère le point $E(1\,;0,5\,;4)$. Les points A, B, D et E sont ils coplanaires ?

4. On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est :
   $$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 - 2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$$
   a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de Δ, distinct de $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) Déterminer les coordonnées d'un point B de Δ, distinct de $A(-3\,;4\,;1)$

   c) Le point $D(-6\,;10\,;4)$ appartient-il à Δ ?

   d) On donne $C(-1\,;0\,;3)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

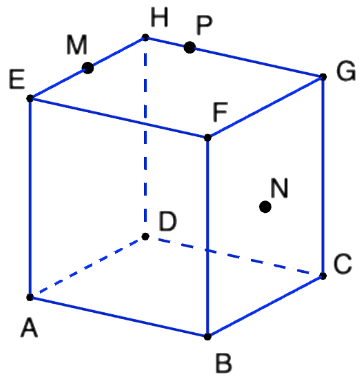
Exercice 2 : Soit ABCD un tétraèdre. On considère les points K, L et E définis par : **… / 3**

$$\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

1. Démontrer que $2\overrightarrow{KE} = 6\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$
2. Exprimer $\overrightarrow{LE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire que les points K, L et E sont alignés.

Exercice 3 : ABCDEFGH est un cube. **… / 3**

On note M le milieu de [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
2. On admet que :
   - les droites (LN) et (CG) sont sécantes en un point T.
   - les droites (LN) et (BF) sont sécantes en un point Q.

   Construire la section du cube par le plan (MNP). Rédiger le protocole de construction.

Exercice 4 : Soient d et d' les droites de représentations paramétriques : **… / 3**

$$d : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 4t \\ z = 8 - 6t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

1. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? Justifier.
2. Montrer que les droites d et d' sont sécantes en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 5 : Vers une question ouverte. **… / 4**

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
Soit $A(-2 ; 3 ; 5)$ et $B(1 ; 2 ; 3)$ et $C(2 ; 4 ; 2)$ trois points de l'espace et t un réel.
On considère le point M_t défini par $\overrightarrow{AM_t} = t\,\overrightarrow{BC}$. Les questions 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Le triangle ABC est il rectangle ? Justifier.
2. a) Déterminer les coordonnées du point M_t.

   b) Pour quelle valeur de t la distance OM_t est-elle minimale ? Quelle est cette longueur ?

   Indication : On pourra commencer par exprimer la longueur OM_t en fonction de t.

Correction du DS n°2

Exercice 1 : (EC)

1. Cf. la correction de l'exercice n°1 du cours.
2. Cf. la correction de l'exercice n°6 du cours.
3. Cf. la correction de l'exercice n°9 du cours.
4. Cf. la correction de l'exercice n°10 du cours.

Exercice 2 : Soit ABCD un tétraèdre. On considère les points K, L et E définis par :

$$\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

1. Démontrer que $2\overrightarrow{KE} = 6\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$

On a : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

On en déduit, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

De plus : $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB}$

Donc : $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{KE} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$2\overrightarrow{KE} = 6\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$

2. Exprimer $\overrightarrow{LE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On a : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

On en déduit, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

De plus : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{LE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{LE} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{LE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \frac{2}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{LE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

3. En déduire que les points K, L et E sont alignés.

D'une part, on a : $\overrightarrow{LE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{LE} = 6\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$

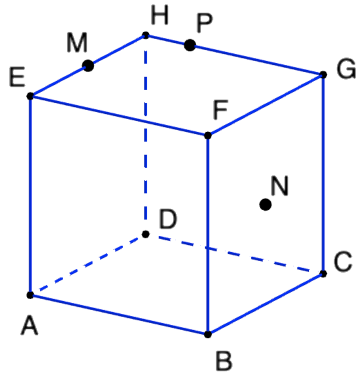
D'autre part, on a : $2\overrightarrow{KE} = 6\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$

Donc : $2\overrightarrow{KE} = 3\overrightarrow{LE} \Leftrightarrow \overrightarrow{KE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{LE}$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{KE}$ et $\overrightarrow{LE}$ sont colinéaires donc les points K, L et E sont alignés.

Exercice 3 : ABCDEFGH est un cube.

On note M le milieu de [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.

M est le milieu de [EH] et P est tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.
On en déduit que M et P appartiennent au plan (EHG). EHGF est un carré donc F appartient aussi à (EHG).
Ainsi, les droites (MP) et (FG) sont coplanaires. On en déduit qu'elles sont soit parallèles soit sécantes.
EHGF étant un carré, les droites (EH) et (FG) sont parallèles. M est le milieu de [EH] mais P n'appartient pas à (EH) donc (MP) et (FG) ne peuvent être parallèles. Ainsi, (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.

2. On admet que :
   - les droites (LN) et (CG) sont sécantes en un point T.
   - les droites (LN) et (BF) sont sécantes en un point Q.

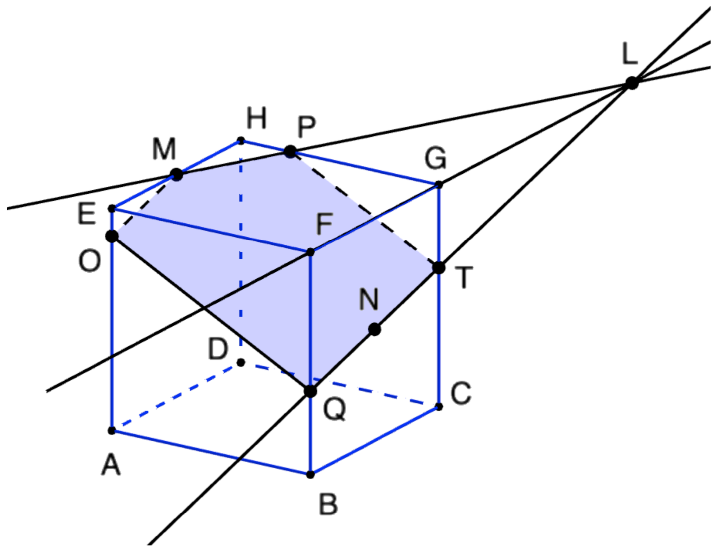
Construire la section du cube par le plan (MNP). Rédiger le protocole de construction.

Protocole de construction :
On commence par faire apparaître :
- Le point d'intersection L de (MP) et (FG)
- Le point d'intersection T de (LN) et [CG]
- Le point d'intersection Q de (LN) et [BF]

Le plan (MNP) coupe :
- La face EHGF selon le segment [MP]
- La face HGCD selon le segment [PT]
- La face BCGF selon le segment [TQ]

Les faces BCGF et ADHE sont parallèles.
On en déduit que le plan (MNP) coupe ces deux plans selon des droites parallèles.
Ainsi, on trace la parallèle à (TQ) passant par M. Cette droite coupe l'arête [AE] en un point O.
On en déduit que le plan (MNP) coupe :
- La face ADHE selon le segment [OM]
- La face ABFE selon le segment [OQ]

Finalement, la section du cube par le plan (MNP) est le pentagone MPTQO.



Exercice 4 : Soient d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = \text{-}2 + 4t \\ z = 8 - 6t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = \text{-}6 + 2k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

1. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? Justifier.

La droite d est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ \text{-}6 \end{pmatrix}$ tandis que d' est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \text{-}1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Or : $\dfrac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \dfrac{4}{1} = 4$ mais : $\dfrac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \dfrac{4}{\text{-}1} = \text{-}4 \neq 4$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que d et d' ne sont pas parallèles.

2. Montrer que les droites d et d' sont sécantes en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

d et d' sont sécantes en $\Omega(\,x\,;\,y\,;\,z\,)$ si et seulement si le système (S) : $\begin{cases} 1 + 4t = 15 + k \\ \text{-}2 + 4t = 8 - k \\ 8 - 6t = \text{-}6 + 2k \end{cases}$ admet un couple de solutions réelles $(\,t\,;\,k\,)$ unique. On résout (S) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - k = 15 - 1 \\ 4t + k = 8 + 2 \\ \text{-}6t - 2k = \text{-}6 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - k = 14 \\ 4t + k = 10 \\ \text{-}6t - 2k = \text{-}14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - k = 14 & L_1 \\ 4t + k = 10 & L_2 \\ 3t + k = 7 & L_3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - k = 14 & L_1 \\ 4t + 4t + k - k = 10 + 14 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 3t + k = 7 & L_3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - k = 14 \\ 8t = 24 \\ 3t + k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - k = 14 \\ t = \dfrac{24}{8} = 3 \\ 3t + k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ 12 - k = 14 \\ 9 + k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ 12 - 14 = k \\ k = 7 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ k = \text{-}2 \end{cases}$$

Le couple $(\,t\,;\,k\,) = (\,3\,;\,\text{-}2\,)$ est solution de (S). Donc Ω est le point de d de paramètre 3 :

$\begin{cases} x = 1 + 4 \times 3 = 13 \\ y = \text{-}2 + 4 \times 3 = 10 \\ z = 8 - 6 \times 3 = \text{-}10 \end{cases}$ Ainsi, d et d' sont sécantes en $\Omega(\,13\,;\,10\,;\,\text{-}10\,)$.

Exercice 5 : Vers une question ouverte.

On se place dans un repère orthonormé $(\,\mathrm{O}\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\,)$.
Soit $\mathrm{A}(\,\text{-}2\,;\,3\,;\,5\,)$ et $\mathrm{B}(\,1\,;\,2\,;\,3\,)$ et $\mathrm{C}(\,2\,;\,4\,;\,2\,)$ trois points de l'espace et t un réel.
On considère le point M_t défini par $\overrightarrow{\mathrm{AM}_t} = t\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Les questions 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Le triangle ABC est il rectangle ? Justifier.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 2 - 3 \\ 3 - 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 3 \\ \text{-}1 \\ \text{-}2 \end{pmatrix}$ On en déduit AB = $\sqrt{3^2 + (\text{-}1)^2 + (\text{-}2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$

De même, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \text{-}3 \end{pmatrix}$ On en déduit AC = $\sqrt{4^2 + 1^2 + (\text{-}3)^2} = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26}$

et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \text{-}1 \end{pmatrix}$ On en déduit BC = $\sqrt{1^2 + 2^2 + (\text{-}2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

Le plus grand côté du triangle ABC est [AC].

$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 14 + 9 = 23 \neq 26$ Donc $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 \neq \mathrm{AC}^2$

Ainsi, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC ne peut être rectangle.

2. a) Déterminer les coordonnées du point M_t.

Soit $t \in \mathbb{R}$. $\mathrm{M}_t\,(\,x_{M_t}\,;\,y_{M_t}\,;\,z_{M_t}\,)$ est défini par $\overrightarrow{\mathrm{AM}_t} = t\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{AM}_t}\begin{pmatrix} x_{M_t}+2 \\ y_{M_t}-3 \\ z_{M_t}-5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

On en déduit : $\begin{cases} x_{M_t}+2 = t \\ y_{M_t}-3 = 2t \\ z_{M_t}-5 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_t} = -2+t \\ y_{M_t} = 3+2t \\ z_{M_t} = 5-t \end{cases}$

b) Pour quelle valeur de t la distance OM_t est-elle minimale ? Quelle est cette longueur ?

Indication : On pourra commencer par exprimer la longueur OM_t en fonction de t.

Soit $t \in \mathbb{R}$. M_t est le point de coordonnées $(\,-2+t\,;\,3+2t\,;\,5-t\,)$.

On en déduit : $\overrightarrow{\mathrm{OM}_t}\begin{pmatrix} x_{M_t}-0 \\ y_{M_t}-0 \\ z_{M_t}-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{OM}_t}\begin{pmatrix} -2+t \\ 3+2t \\ 5-t \end{pmatrix}$

Puis : $\mathrm{OM}_t = \sqrt{(-2+t)^2+(3+2t)^2+(5-t)^2} = \sqrt{4-4t+t^2+9+12t+4t^2+25-10t+t^2} = \sqrt{6t^2-2t+38}$

On considère le polynôme du 2nd degré $6t^2-2t+38$.

$\Delta = b^2-4ac = 4-4\times 6\times 38 = 4-912 = -908 < 0$

On en déduit que l'équation $6t^2-2t+38=0$ n'admettrait aucune solution dans $\mathbb{R}$ et que le polynôme est de signe constant. De plus, $a=6>0$ implique que : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $6t^2-2t+38>0$

Ainsi, la longueur $\mathrm{OM}_t = \sqrt{6t^2-2t+38}$ est définie, quelle que soit la valeur du réel t.

La fonction racine carrée étant croisante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, la distance OM_t est minimale lorsque OM_t^2 est minimal.

De plus : $\mathrm{OM}_t^2 = 6t^2-2t+38 = f(t)$

On étudie les variations de la fonction polynôme f :

$a=6>0$ On en déduit que la parabole représentative de f est ouverte vers le haut.

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$. On en déduit que f est décroisante sur $]\,-\infty\,;\,\dfrac{1}{6}\,]$ puis croissante sur $[\,\dfrac{1}{6}\,;\,+\infty\,[$.

Finalement, la distance OM_t est minimale pour $t = \dfrac{1}{6}$.

Dans ce cas, $\mathrm{OM}_t = \sqrt{6\times(\dfrac{1}{6})^2 - 2\times\dfrac{1}{6}+38} = \sqrt{\dfrac{227}{6}} \approx 6,15$